

## 宇宙船内で回転するペンチの倒立と振動

### Turnover and Swinging of Rotating Pliers in Space Shuttle

山 田 豊  
Yutaka YAMADA

*When handles of pliers are opened and they are rotated around thier symmetrical axis, with tips upward, the pliers will have several stable turns in space shuttle. Then they will flip upside down and have another several stable turns. These movements continue repeatedly. Same thing will happen to the movements of the board which is rotated around the principal axis of inertia, parallel to the surface of the board. To explain this phenomenon, the law of angular momentum conservation is very important. The former equation for this law is not accurate. Therefor, a new accurate equation is presented. By using this new equation and the law of kinetic energy conservation, angular velocity and angular acceleration for turnover and swinging of rotating object are obtained.*

#### 1 緒 言

平成5年3月10日、愛知工業大学、愛和会館講堂において、日本機械学会東海支部の総会、講演会行事の一環として、特別講演会が開催された。それは毛利宇宙飛行士による「ふわっと'92と宇宙開発」と題するもので、開会前から多大の関心と呼んでいた。愛工大では、当日の教授会の開会時刻を例年より遅らせ、講演会の終了後に開会することにし、できるだけ多くの教職員がこの講演を聞けるように配慮した。そのため、例年の3月に開催される特別講演に比べて、比較にならない多くの参加者が集まり、座席の通路も一杯の人であふれる程であった。ビデオの大型投影装置からスクリーンに写し出された宇宙船（スペースシャトル）内の諸現象は、いずれも興味深いものばかりであった。その中でもペンチの回転運動は、特に奇妙に感じられた。

それは宇宙船（スペースシャトル）内でペンチの取手を開き、先端と取手側を結ぶ対称軸まわりに回転させると、数回転程安定回転していたのに、突然先端と取手が入れ替って倒立し、そこで数回安定回

転して、また突然もとの回転に戻る運動を繰り返す現象である。それから間もなく、東京で開催された毛利氏の講演の中で、この現象は特に強い関心を集めたようで、後に同学会へ3件の異なった説明が寄せられた<sup>(1)</sup>。これらはいずれも、回転する物体の慣性主軸と一致する座標系を用い、重心まわりに回転モーメントを加えない場合の、オイラーの方程式を基礎としている。しかしこの解は、解析的には求まらないとして、数値計算をしている。またこの現象を説明するのに、最も重要である角運動量保存の法則を正しく適用したものは1件もなく、倒立する原因を説明したものも無い。その最大の理由は、角運動量保存則を説明した内外の力学関係の書物の記述が、適切でないことに原因がある様に思われる。

そこで、宇宙船内で回転するペンチの倒立運動について、正しい説明を日本機械学会誌に投稿したい旨を、詳細な内容を付して申し出た。これに対し同学会から、投稿するなら希望掲載欄は「談話室」とし、2ページ以内で執筆する様返事があった。その結果、1994年9月号の会誌に掲載された記事は、紙数制限のため極めて基本的な内容を簡単に述べただけになった<sup>(2)</sup>。そこでこの現象の理解は、誤り易い問題であることから、このような不十分な記述のま

まで、終わらせるべきでないと思えるに至った。特に自由回転する物体の角運動量保存の法則については、筆者が調べた範囲内では、教科書の記述に問題があるので、これに関する説明を含め、この現象を多くの角度から論ずることにしたい。

## 2 板状物体の倒立

### 2.1 倒立するための形状

回転する物体が倒立するには、どのような形状が必要かを考える。図1は取手を十分に開いたペンチの形状、およびここで使用する座標軸を示す。

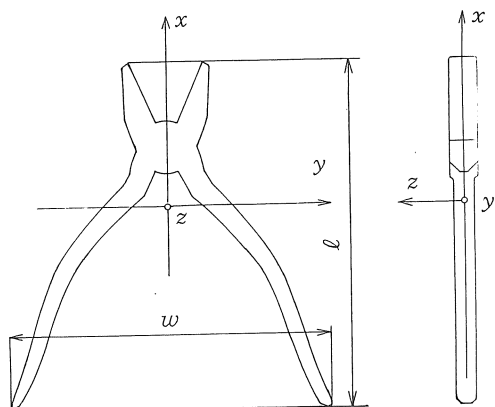


図1 ペンチと座標軸

図に示すように、ペンチの面に平行な対称軸を  $x$  軸、同じく面に平行で重心を通り、 $x$  軸に垂直な  $y$  軸、両者に垂直に  $z$  軸をとる。この  $x, y, z$  軸は、ペンチの慣性主軸と一致する。図からペンチの長さ  $l$  および取手の幅  $w$  に比べて、この両者に直角面の厚さが小さいので、板状の物体と同様に取扱うことができる。板状の物体の例として、円板を取上げよう。円板を中心を通る垂直軸のまわりに回転させた場合を考えると、これはコマと同じで非常に安定している。姿勢制御に用いられるジャイロスコープは、高速回転する円板の回転軸の方向が、変わらない性質を利用したものである。したがって板を板面に垂直な軸のまわりに回転させた場合には倒立しない。したがって図1のペンチのように、板状の物体を回転させた場合に倒立するのは、板の面に平行な  $x$  軸または  $y$  軸まわりに回転させた場合が考えられ、面に垂直な  $z$  軸まわりに回転させた場合は倒立しない。いま厚さが無視できる任意形状の板の場合について、 $x, y$  軸を面に沿った慣性主軸と一致させ、 $z$  軸を両

軸に垂直にとる。各軸まわりの慣性モーメント  $I_x, I_y, I_z$  は微小質量  $dm$  の座標を  $x, y, z$ , 全質量を  $m$  とすれば

$$I_x = \int_m y^2 dm, \quad I_y = \int_m x^2 dm, \\ I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad \dots\dots (2-1) \\ I_y = a I_x \quad \text{とおけば} \quad I_z = (1+a) I_x \quad \dots\dots (2-2)$$

となる。ここに  $a$  は定数であって、円板では  $a = 1$  である。ペンチ、ニッパなどの  $a$  の値は、取手を十分に開いて  $a$  の値を最小にした場合でも、1より大きく、およそ2程度である。したがって宇宙船内の実験で、ペンチに回転を与えた  $x$  軸まわりの慣性モーメント  $I_x$  が、他の  $I_y, I_z$  に比べて最小である。

### 2.2 角運動量保存の法則

無重力場で回転する物体の運動は、地上で物体に回転を与えて投げ上げた場合、空気抵抗が無視できる場合には、同じ回転運動になる。このようにして自由回転させた場合の物体について、角運動量保存の法則が成り立つ。通常この法則をつぎのように書き表している。任意形状の物体の慣性主軸方向の角速度成分を  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  慣性モーメントを  $I_x, I_y, I_z$  単位ベクトルを  $i, j, k$  とする。慣性モーメント  $I_x, I_y, I_z$  は

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_m (z^2 + x^2) dm, \\ I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm,$$

である。角運動量保存則により、角運動量  $L$  は  $L = I_x \omega_x i + I_y \omega_y j + I_z \omega_z k = \text{一定} \dots\dots (2-3)$  としている<sup>3)</sup>。また角運動量  $L$  の2乗は

$$L^2 = I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = \text{一定} \quad \dots (2-4)$$

としている<sup>3)</sup>。しかし式(2-3)の  $L$  および式(2-4)の  $L^2$  が一定であるとして、角運動量保存則を表すのは、誤りである。これでは物体の回転軸の方向と、角運動量の方向が一致しない。角運動量は、方向を持ったベクトル量であるから、その保存則は大きさのみではなく、方向も変わらない点に注意すべきである。方向が変わらないとは、静止座標系に対する角度が一定のことで、静止座標系とは、例えば大宇宙に固定した座標を考えれば良い。したがって最初に物体に与えた角運動量の方向を  $\xi$  軸とすると、 $\xi$  軸の方向および  $\xi$  軸まわりの角運動量の大きさが不変である。式(2-3)および式(2-4)による誤りは、不変の軸を用いなかったためと思われる。

そこで正しい角運動量保存の法則は、つぎのように書き表すべきである。物体をξ軸のまわりにω<sub>ξ</sub>の角速度で回転させたとき、ξ軸とx, y, z軸との間の角度をα, β, γとする。ω<sub>x</sub>, ω<sub>y</sub>, ω<sub>z</sub>はξ軸まわりの角速度ω<sub>ξ</sub>のx, y, z方向の成分で、ω<sub>x</sub>=ω<sub>ξ</sub> cos α, ω<sub>y</sub>=ω<sub>ξ</sub> cos β, ω<sub>z</sub>=ω<sub>ξ</sub> cos γであるから、角運動量保存則は次式で表される。

$$L = I_x \omega_x \cos \alpha + I_y \omega_y \cos \beta + I_z \omega_z \cos \gamma$$

$$= \omega_\xi (I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma)$$

$$= \omega_\xi I_\xi = \text{一定} \dots\dots\dots (2-5)$$

$$I_\xi = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \dots\dots\dots (2-6)$$

I<sub>ξ</sub>は物体のξ軸まわりの慣性モーメントである。物体はξ軸まわりに回転しながら、倒立または振動するので、ω<sub>ξ</sub>, I<sub>ξ</sub>, α, β, γ等が変化するが、式(2-5)で表される角運動量Lは一定に保たれる。

ここで式(2-6)で表わされるξ軸まわりの慣性モーメントI<sub>ξ</sub>について考える。ξ軸とx, y, z軸との角度はα, β, γであるから、x軸上xの点のξ軸からの距離はx sin αである。y, zの点も同様であるから物体全体では、I<sub>ξ</sub>は次式で表わされる。

$$I_\xi = \sin^2 \alpha \int_m x^2 dm + \sin^2 \beta \int_m y^2 dm$$

$$+ \sin^2 \gamma \int_m z^2 dm \dots\dots\dots (2-7)$$

また、cos<sup>2</sup>α + cos<sup>2</sup>β + cos<sup>2</sup>γ = 1, sin<sup>2</sup>α + cos<sup>2</sup>α = 1であるから、sin<sup>2</sup>α = 1 - cos<sup>2</sup>α = cos<sup>2</sup>β + cos<sup>2</sup>γである。

sin<sup>2</sup>β, sin<sup>2</sup>γも同様であるので、これらを代入すれば、I<sub>ξ</sub>は次式のようになり、式(2-6)と一致する。

$$I_\xi = (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \int_m x^2 dm + (\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) \int_m y^2 dm + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \int_m z^2 dm$$

$$= \cos^2 \alpha \int_m (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int_m (z^2 + x^2) dm + \cos^2 \gamma \int_m (x^2 + y^2) dm$$

$$= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$$

2.3 y軸まわりの回転による倒立

いま厚さが無視できる板状物体を、慣性主軸のx軸のまわりにω<sub>o</sub>の角速度で回転させた場合、物体に与えられる角運動量L = I<sub>x</sub>ω<sub>o</sub>は、方向が一定の静止したξ軸まわりに一定である。このξ軸は、最初はx軸と一致すると考えてよい。物体がξ軸まわりに回転すると同時に、y軸まわりに回転して、x軸がξ軸に対して角度θ傾いた場合を考える。この場合、αが1に近い場合、すなわち円板がその直径を軸として回転した場合、円板に垂直なz軸まわり

には回転しないので、z軸まわりの回転は無いものとする。x軸がξ軸に対し、θ傾いた場合のξ軸まわりの角速度をω<sub>ξ</sub>とすると

$$I_x \omega_o = I_\xi \omega_\xi \dots\dots\dots (2-8)$$

となる。ここにI<sub>ξ</sub>は、板状物体がy軸まわりに回転してθ傾いたときのξ軸まわりの慣性モーメントであって、次式で表わされる。

$$I_\xi = \int_m (y^2 + x^2 \sin^2 \theta) dm = (1 + a \sin^2 \theta) I_x$$

$$\dots\dots\dots (2-9)$$

したがって式(2-8)、(2-9)から、次式のω<sub>ξ</sub>を得る。

$$\omega_\xi = \frac{\omega_o}{1 + a \sin^2 \theta} \dots\dots\dots (2-10)$$

なお式(2-9)のI<sub>ξ</sub>は、式(2-6)でα=θ, β=90°, γ=90°-θとすれば得られる。

角運動量保存則と並んで、運動エネルギー保存則も厳密に成立する。最初に物体に与えられたエネルギーは、θ傾いた場合のξ軸まわりの角速度ω<sub>ξ</sub>の回転と、y軸まわりのω<sub>y</sub>の回転の二つの運動エネルギーの和に等しい。運動エネルギーの2倍をとり、次式を得る。

$$I_x \omega_o^2 = (1 + a \sin^2 \theta) I_x \omega_\xi^2 + a I_x \omega_y^2$$

$$\dots\dots\dots (2-11)$$

式(2-10)および式(2-11)から、y軸まわりの角速度 ω<sub>y</sub> = dθ/dt は

$$\omega_y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + a \sin^2 \theta}} \omega_o \dots\dots\dots (2-12)$$

となる。ω<sub>y</sub>はθ=0°, 180°でゼロ、θ=90°で最大値をとる。上式で表されるy軸まわりの回転は、静止したξ軸と直角であり、ξ軸まわりの角運動量とは無関係である。ただしω<sub>y</sub>によってθが変わるので、I<sub>ξ</sub>が変わり、式(2-10)で表されるω<sub>ξ</sub>も変化するが、ただそれだけのことで、角運動量保存則には、ω<sub>y</sub>は直接関与しない。しかしω<sub>y</sub>は、式(2-3)のLおよび式(2-4)のL<sup>2</sup>の値には直接関与するが、前述の通りこれらの式は誤りである。

式(2-12)により、倒立の角速度は求まったが、倒立の原因について考える。静止したξ軸に対し、x軸がy軸まわりに回転して角θ傾いた場合、物体の各点の質量は、ξ軸まわりの回転のために遠心力が作用する。図2に示すように、x軸上xにあるdmの質量に作用する遠心力F<sub>c</sub>は、x sin θ ω<sub>ξ</sub><sup>2</sup> dmであり、F<sub>c</sub>のx軸に垂直な成分はF<sub>c</sub> cos θである。したがってF<sub>c</sub>によるy軸のまわりの回転のモー

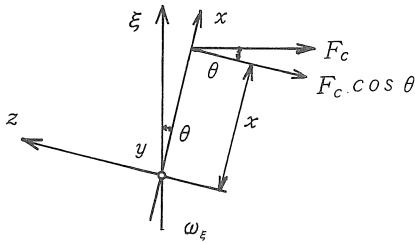


図2 遠心力による回転モーメント

ントは  $x^2 \sin \theta \cos \theta \omega_{\xi}^2 dm$  となる。物体全部では  $y$  軸まわりの回転モーメント  $M$  は

$$M = \omega_{\xi}^2 \sin \theta \cos \theta \int_m x^2 dm = \omega_{\xi}^2 \sin \theta \cos \theta I_y \quad (2-13)$$

となる。この  $M$  のモーメントにより、 $y$  軸まわりの角加速度、 $d\omega_y/dt$  が生じ、これと慣性モーメント  $I_y$  との積が  $M$  に等しい。故に  $d\omega_y/dt$  は次式となり、式 (2-10) および式 (2-12) と同様厳密に成り立つ。

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{\sin 2\theta}{2} \omega_{\xi}^2 = \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\omega_{\xi}^2}{(1+a \sin^2 \theta)^2} \quad (2-14)$$

$d\omega_y/dt$  は  $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  でゼロ、 $45^\circ$  付近で最大、 $135^\circ$  付近で負の最大となる。一方式 (2-12) の  $\omega_y$  を 2 乗して時間  $t$  で微分し、

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \omega_y \frac{d}{d\theta} \text{ の関係を用いても、}$$

式 (2-14) は容易に求められる。

以上物体の回転運動は、静止した  $\xi$  軸まわりの回転と、回転する物体に固定した  $y$  軸まわりの回転の二つから成り立つとして求めた。しかし  $\xi$  軸まわりの  $\omega_{\xi}$  は、回転する物体に固定した  $x$  軸まわりの成分  $\omega_x = \omega_{\xi} \cos \theta$  と、 $z$  軸成分  $\omega_z = \omega_{\xi} \sin \theta$  に分解できる。したがって角運動量保存則は、式 (2-5) より  $I_x \omega_o = I_x \omega_x \cos \theta + I_z \omega_z \sin \theta$

$$= (1+a \sin^2 \theta) I_x \omega_{\xi} \quad (2-15)$$

となり、これから式 (2-10) が求められる。同様に運動エネルギー保存則は、その 2 倍をとり

$$I_x \omega_o^2 = I_x \omega_x^2 + (1+a) I_x \omega_{\xi}^2 + a I_x \omega_z^2 \quad (2-16)$$

となり、 $\omega_x = \omega_{\xi} \cos \theta$ 、 $\omega_z = \omega_{\xi} \sin \theta$  を代入すれば式 (2-12) が得られる。 $\xi$  軸と  $y$  軸は直角であるので、 $\omega_{\xi}$  の  $y$  軸成分は無い。 $I_x \omega_x^2$  は  $x$  軸、 $(1+a) I_x \omega_z^2$  は  $z$  軸、 $a I_x \omega_{\xi}^2$  は  $y$  軸まわりの運動

エネルギーの 2 倍である。各軸まわりの運動エネルギーの全運動エネルギー  $\frac{1}{2} I_x \omega_o^2$  に対する比率を  $x_e, z_e, y_e$  とすれば、 $\xi_e = x_e + z_e$  である。

$$x_e = \frac{\cos^2 \theta}{(1+a \sin^2 \theta)^2}, \quad z_e = \frac{(1+a) \sin^2 \theta}{(1+a \sin^2 \theta)^2}$$

$$y_e = \frac{a \sin^2 \theta}{1+a \sin^2 \theta}, \quad \xi_e = \frac{1}{1+a \sin^2 \theta} \quad (2-17)$$

$$x_e + z_e + y_e = \xi_e + y_e = 1 \quad (2-18)$$

$a = 2$  の場合について、 $\xi$  軸と  $x$  軸との傾き角  $\theta$  に対して各軸まわりのエネルギー比率  $x_e, z_e, y_e$  を示すと図 3 のようになる。 $30^\circ, 150^\circ$  では 3 軸とも  $1/3$ 、 $90^\circ$  では  $x_e = 0, z_e = 1/3, y_e = 2/3$  である。

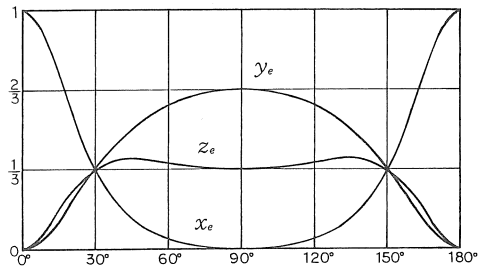


図3 運動エネルギー比率、 $x_e, z_e, y_e, a = 2$

今まで物体が  $y$  軸まわりに回転して、 $\xi$  軸と  $\theta$  傾いた場合について、 $\omega_y, d\omega_y/dt$  を求めた。 $\theta$  がゼロの場合には、 $d\omega_y/dt$  がゼロ、すなわち  $y$  軸まわりの回転のモーメントがゼロである。また  $\omega_y$  もゼロであるので、最初に与えた角運動量の方向と慣性主軸  $x$  となす角  $\theta$  がゼロならば、物体は倒立しない。しかしベンチを対称軸  $x$  まわりに回転させた場合、どんなに注意深くしても  $\theta$  をゼロに近づけることはできない。そこで数回転もすれば倒立することになる。もし長方形、菱形等の板の面に平行な慣性主軸に一致させて、細い軸を高精度に取り付け、さらに釣合試験機を用いて、不釣合部分を削り取って行けば、軸をかなりの精度で慣性主軸に一致させることができる。このようにすれば、 $\xi$  軸まわりに数百回転程定常回転させ、 $\theta$  がある程度大きくなってから急に倒立することも可能となる。

式 (2-12) の  $\omega_y$  は  $d\theta/dt$  に等しい。そこで最初の  $\xi$  軸と  $x$  軸の角度  $\theta_0$  から  $\pi - \theta_0$  の角度まで、倒立に要する時間を  $T/2$  とすると、次式で与えられる。

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_o} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \frac{\sqrt{1+a \sin^2 \theta}}{\sin \theta} d\theta \quad (2-19)$$

2.4 z軸まわりの回転による倒立

$a = I_y / I_x$  が1に近い場合には、倒立はy軸まわりに回転する場合のみとなる。しかし  $a$  がたとえば2程度と大きい場合には、最初の  $\theta_0$  がz軸まわりの回転で生じたとすると、z軸まわりに回転して倒立することも考えられる。そこで、板状物体が板に垂直なz軸まわりに回転して、 $\xi$ 軸とx軸との角度が  $\theta$  の場合を考える。この場合は簡単のため、結果のみを示すことにする。

$$I_\xi = I_y \sin^2 \theta + I_x \cos^2 \theta = (a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) I_x$$

$$\omega_\xi = \frac{\omega_0}{a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (2-20)$$

$$I_x \omega_\theta^2 = (a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) I_x \frac{\omega_0^2}{(a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2} + (1+a) I_x \omega_\xi^2 \quad \dots\dots\dots (2-21)$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1}{(1+a)(a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}} \omega_0 \dots (2-22)$$

$$\frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{(a-1) \sin 2\theta}{(a+1) 2} \frac{\omega_0^2}{(a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2} \dots\dots\dots (2-23)$$

式(2-22)、(2-23)からも  $a = 1$  の場合には、z軸まわりの回転による倒立は起きない事がわかる。さらに  $a < 1$  の場合、すなわち  $I_y < I_x < I_z$  の場合にも、z軸まわりの回転による倒立は起きない。つぎに各軸まわりの運動エネルギーの比率は

$$x_e = \frac{\cos^2 \theta}{(a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2}, \quad \xi_e = \frac{x_e + y_e}{1}$$

$$y_e = \frac{a \sin^2 \theta}{(a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2}, \quad = \frac{1}{a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

$$z_e = \frac{a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1}{a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}, \quad \dots\dots\dots (2-24)$$

エネルギー比率の合計  $x_e + y_e + z_e = 1$  である。

3 一般形状物体の倒立

前章の厚さが無視できる板の場合は、慣性主軸  $x$  および  $y$  は、板の面に沿う方向に取ったので、 $z$  方向には質量が無かった。一般形状では、 $z$  方向にも質量があるので、 $I_x$  と  $I_y$  は板の場合に比べて、 $z$  方向の質量によるものが付加される。そこで板の場合に倣って、つぎのような記号を用いる。

$$\int_m x^2 dm = I_{y_0}, \int_m y^2 dm = I_{x_0}, \int_m z^2 dm = I_0 \dots\dots\dots (3-1)$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_m (y^2 + z^2) dm = I_{x_0} + I_0 \\ I_y &= \int_m (x^2 + z^2) dm = I_{y_0} + I_0 \\ I_z &= \int_m (x^2 + y^2) dm = I_{z_0} + I_{x_0} \end{aligned} \right\} (3-2)$$

さらに  $I_{y_0} = a I_{x_0}, I_0 = b I_{x_0}$  とおけば (3-3)

$$\left. \begin{aligned} I_x &= (1+b) I_{x_0}, I_y = (a+b) I_{x_0} \\ I_z &= (1+a) I_{x_0} \end{aligned} \right\} (3-4)$$

$b$  は  $b \leq 1$  とする。 $b > 1$  の場合は、 $y$  軸と  $z$  軸を取替れば、 $b < 1$  となる。したがって前に述べた厚さの無い板は  $\int_m z^2 dm = I_0 = 0$ 、すなわち  $b = 0$  の場合である。 $x$  軸に対し、軸対象のコマでは、 $b = 1$ 、特に厚さの無い円板では、 $x$  方向の質量が無いから、 $a = 0, b = 1, I_y / I_x = 1/2, I_z / I_x = 1/2$  である。図1のベンチでは、 $a$  は2程度であるが、 $b$  は0.1より小さく、厚さの無い板と大差は無い。

まず物体に与える角運動量は、板の場合と同様に  $x$  軸 ( $\xi$  軸) まわりに  $I_x \omega_0$  とする。物体が  $y$  軸まわりに回転して、 $x$  軸が  $\xi$  軸に対して角度  $\theta$  傾いた場合を考え、この場合の  $\xi$  軸まわりの慣性モーメントを求める。この場合の慣性主軸  $x, y, z$  と  $\xi$  軸の関係は、図2と同様である。回転物体を特徴づけるのは、慣性モーメントのみである。よって任意形状の物体も、質量が慣性主軸上のみ分布する物体も、慣性モーメントが同じなら、全く同じに取扱うことができる。したがって物体全体の  $\xi$  軸まわりの慣性モーメント  $I_\xi$  は、式(3-1)を適用して次式となる。

$$I_\xi = \int_m (y^2 + x^2 \sin^2 \theta + z^2 \cos^2 \theta) dm = I_{x_0} + I_{y_0} \sin^2 \theta + I_0 \cos^2 \theta = (1 + a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta) I_{x_0} \dots\dots (3-5)$$

上式は式(2-6)または(2-7)で、 $\alpha = \theta, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ - \theta$  としても求まる。角運動量保存則より

$$I_x \omega_0 = (1+b) I_{x_0} \omega_\theta = I_\xi \omega_\xi \quad \dots\dots\dots (3-6)$$

$$\omega_\xi = \frac{(1+b) \omega_0}{1 + a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (3-7)$$

運動エネルギー保存則により2倍をとり次式を得る。

$$I_x \omega_0^2 = I_\xi \omega_\xi^2 + I_y \omega_y^2 \quad \dots\dots\dots (3-8)$$

これに式(3-2)、(3-3)、(3-7)を代入すると  $\omega_y$  は次式となる。

$$\omega_y = \sqrt{\frac{(1+b)(a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta - b)}{(a+b)(1 + a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)}} \omega_0 \dots\dots\dots (3-9)$$

角加速度  $d\omega_y/dt$  は、板の場合と同様にして求められる。

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{(a-b)}{(a+b)} \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{(1+b)^2 \omega_o^2}{(1+a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^2} \dots\dots\dots (3-10)$$

物体がy軸まわりに回転して、倒立する途中における、全運動エネルギー  $\frac{1}{2} I_x \omega_o^2$  の各軸まわりのエネルギーの割合、 $x_e, z_e, y_e, \xi_e$  を板の場合と同様にしと求めると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_e &= \frac{(1+b)^2 \cos^2 \theta}{(1+a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^2} \\ z_e &= \frac{(1+a)(1+b) \sin^2 \theta}{(1+a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^2} \\ y_e &= \frac{a\sin^2\theta+b\cos^2\theta-b}{1+a\sin^2\theta+b\cos^2\theta} \\ \xi_e &= \frac{1+b}{1+a\sin^2\theta+b\cos^2\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3-11)$$

$$x_e+z_e+y_e = \xi_e+y_e = 1 \dots\dots\dots (3-12)$$

次にy軸まわりでなく、z軸まわりに回転して倒立することは、板の場合よりも十分に有り得る。しかし簡単のため、結果のみ述べる。

$$I_{\xi} = (a\sin^2\theta+\cos^2\theta+b) I_{xo} \dots\dots\dots (3-13)$$

$$\omega_{\xi} = \frac{(1+b) \omega_o}{a\sin^2\theta+\cos^2\theta+b} \dots\dots\dots (3-14)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{(1+b)(a\sin^2\theta+\cos^2\theta-1)}{(1+a)(a\sin^2\theta+\cos^2\theta+b)}} \omega_o \dots\dots\dots (3-15)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{a-1}{a+1} \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{(1+b)^2 \omega_o^2}{(a\sin^2\theta+\cos^2\theta+b)^2} \dots\dots\dots (3-16)$$

板の場合と同様、 $a \leq 1$  の場合は  $d\omega_z/dt$  がゼロまたは負となるので、倒立しない。エネルギー比率は省略する。

4 オイラーの方程式

無重力場で、自由に回転する物体の運動は次式で示すオイラーの方程式が成り立つ<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} &= (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} &= (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-1)$$

この式の左辺は、ある慣性主軸まわりの慣性モーメントと角加速度の積であるから、右辺はその慣性主軸まわりに物体を倒立させるための回転モーメント

を表わしていることが予想される。そこでまず物体には今まで述べたように、静止軸のξ軸まわりに角運動量が与えられ、ξ軸は最初は物体に固定した慣性主軸のx軸とほとんど一致しているとする。簡単のためy軸はξ軸に対して垂直で、x軸がξ軸に対して角度θ傾いた場合、ξ軸まわりの角速度をω<sub>ξ</sub>とする。この場合右辺の角速度は、ω<sub>ξ</sub>の成分とすると、ω<sub>x</sub>=ω<sub>ξ</sub>cosθ, ω<sub>z</sub>=ω<sub>ξ</sub>sinθ, ω<sub>y</sub>=0となる。慣性モーメントI<sub>x</sub>, I<sub>y</sub>, I<sub>z</sub>については、式(3-4)が成り立つ。ω<sub>y</sub>=0であるから、オイラーの方程式(4-1)の第1式、第3式はゼロとなり、第2式より

$$(a+b) I_{xo} \frac{d\omega_y}{dt} = (a-b) I_{xo} \omega_x \omega_z \dots\dots\dots (4-2)$$

ω<sub>ξ</sub>は、角運動量保存則より式(3-7)で表わされるので、これを代入すれば、予想通り式(3-10)が求められる。

以上は物体の回転が、静止したξ軸まわりの回転と、物体に固定したy軸まわりの回転から成り立つ場合の例である。式(4-1)第2式のω<sub>x</sub>, ω<sub>z</sub>はω<sub>ξ</sub>のx, z成分を示し、y軸成分のω<sub>y</sub>がゼロの場合であり、左辺のdω<sub>y</sub>/dtは、右辺の遠心力に基づく回転モーメントMによって、物体がy軸まわりに回転して倒立する角加速度を示す。

さらに一般的に、静止したξ軸と、x, y, z軸となす角がα, β, γの場合について考える。当然cos<sup>2</sup>α+cos<sup>2</sup>β+cos<sup>2</sup>γ=1が成り立つ。この場合も、最初はほぼx軸まわりにω<sub>o</sub>の角速度で回転させる。物体は静止したξ軸まわりに回転すると同時に、y軸およびz軸まわりに回転する。ξ軸まわりの慣性モーメントI<sub>ξ</sub>は、式(2-7)、(3-1)から

$$I_{\xi} = \int_m (x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma) dm \dots\dots\dots (4-3)$$

となる。角運動量保存則より、I<sub>x</sub>ω<sub>o</sub>=I<sub>ξ</sub>ω<sub>ξ</sub>よって

$$\omega_{\xi} = \frac{(1+b) \omega_o}{a\sin^2\alpha+\sin^2\beta+b\sin^2\gamma} \dots\dots\dots (4-4)$$

また、ω<sub>x</sub>=ω<sub>ξ</sub>cosα, ω<sub>y</sub>=ω<sub>ξ</sub>cosβ, ω<sub>z</sub>=ω<sub>ξ</sub>cosγ

図4は、静止したξ軸は、物体の慣性主軸x, y, zと角α, β, γをなす場合を示している。ξ軸をyz平面に投影した直線OQと、z軸との間の角をδと

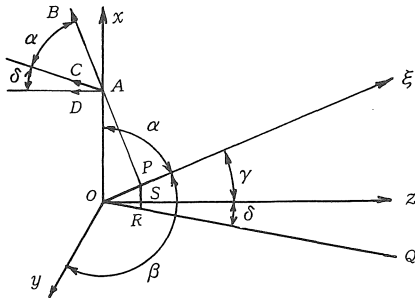


図4 遠心力によるy軸の回転モーメント

する。x軸上に質量mの質点Aが座標xの位置にあるとする。座標系O-xyzは、ξ軸まわりに $\omega_\xi$ の角速度で回転しているとすると、A点にはξ軸に垂直な遠心力 $F_c = mx \sin \alpha \omega_\xi^2$ が作用する。A点からξ軸に垂線APを画くと、 $x \sin \alpha$ は $\overline{AP}$ の長さで、遠心力 $F_c$ はPA方向に作用し、その大きさを $\overline{AB}$ とする。 $F_c$ のx軸に垂直な成分は $F_c \cos \alpha$ で、その大きさを $\overline{AC}$ とする。ξx平面と、ξOQ平面は同一であるので、 $\overline{AC}$ は $\overline{OQ}$ に平行であって、y軸に垂直であるz軸とは角 $\delta$ をなしている。したがって $F_c \cos \alpha$ のz軸に平行な成分、すなわちy軸に垂直な成分は $F_c \cos \alpha \cos \delta$ となる。したがってA点に質量mの質点があった場合、ξ軸まわり $\omega_\xi$ の回転により遠心力が作用し、その力のy軸に垂直な成分は $mx \sin \alpha \cos \alpha \cos \delta \omega_\xi^2$ となる。この力のy軸まわりの回転モーメントは、これにxを乗じて $mx^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \delta \omega_\xi^2$ となる。また図4でP点からyz平面へ垂線PRを画き、z軸へ垂線PSを画けば、 $\overline{OP} \sin \alpha = \overline{OR}$ 、 $\overline{OR} \cos \delta = \overline{OS}$ となる。一方 $\overline{OP} \cos \gamma = \overline{OS}$ であるから $\overline{OP} \sin \alpha \cos \delta = \overline{OS} = \overline{OP} \cos \gamma$ となり、したがって $\sin \alpha \cos \delta = \cos \gamma$ となる。結局x軸上xにあるmの質点によるy軸まわりのモーメント $M_x$ は次式となる。

$$M_x = mx^2 \cos \alpha \cos \gamma \omega_\xi^2 \quad \dots\dots\dots (4-5)$$

同様にz軸上zにmの質点があった場合、y軸まわりの上記と反対方向のモーメント $M_z$ は次式となる。

$$M_z = mz^2 \cos \gamma \cos \alpha \omega_\xi^2 \quad \dots\dots\dots (4-6)$$

この2つのモーメントを合計すれば、 $M = M_x - M_z$ は $M = m(x^2 - z^2) \cos \alpha \cos \gamma \omega_\xi^2 \quad \dots\dots (4-7)$

x, zの位置に質点があるのではなく、質量が連続的に分布する物体の場合、 $m(x^2 - z^2)$ は $\int_m (x^2 - z^2) dm$ となり、式(3-1)、(3-3)より $\int_m (x^2 - z^2) dm = I_{y_0} - I_0 = (a-b) I_x$ となる。したがってy軸まわりの慣性モーメント $I_y$ と角加速

度 $d\omega_y/dt$ の積は、y軸まわりの回転モーメントに等しいので

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = (a-b) I_x \cos \alpha \cos \gamma \omega_\xi^2 \quad \dots\dots\dots (4-8)$$

となる。 $\omega_\xi$ に式(4-4)、 $I_y$ に式(3-3)を代入し

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{(a-b)(1+b)^2 \cos \alpha \cos \gamma \omega_0^2}{(a+b)(a \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + b \sin^2 \gamma)^2} \quad \dots\dots\dots (4-9)$$

同様にz軸まわりの角加速度は次式となる。

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{(a-1)(1+b)^2 \cos \alpha \cos \beta \omega_0^2}{(a+1)(a \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + b \sin^2 \gamma)^2} \quad \dots\dots\dots (4-10)$$

物体をほぼx軸に一致させて $\omega_0$ の角速度で回転させた場合、物体は角運動量方向である静止したξ軸まわりの回転と、二つの慣性主軸yおよびz軸まわりに回転する。そしてx軸がξ軸となす角 $\alpha$ は、最初はほぼゼロであったのが、ほぼ180°まで増加して倒立するに至る。式(4-9)、(4-10)は、その場合の倒立の角加速度を示す。しかし $a < 1$ の場合には、式(4-10)によりz軸まわりに回転しない。また $a < 1$ でy軸まわりの回転のみで倒立する場合でも、式(4-9)により、 $a > b$ であることが必要である。

オイラーの方程式の第2式の $d\omega_y/dt$ の式は、 $a$ を増し $\gamma$ を減じる方向の回転を示し、 $d\omega_z/dt$ は、 $\beta$ を増し $\alpha$ を減じる方向の回転を示す。これに対して式(4-9)、および式(4-10)はいずれも $a$ を増す方向の回転を示す。したがってオイラーの方程式の第3式を用いて $d\omega_x/dt$ を求めると、式(4-10)と符号が逆になる。

オイラーの方程式、式(4-1)の右辺の角速度成分は、既に述べたように、角運動量が一定の静止したξ軸まわりの角速度 $\omega_\xi$ の慣性主軸方向の成分である。また左辺の角加速度成分は $\omega_\xi$ に対し垂直で、右辺の回転モーメントによって生じた、物体の倒立運動による回転を示す。

### 5 回転する物体の振動

今まで述べて来たのは、物体の慣性主軸であるx軸まわりに回転させた場合、ある回転数定常回転した後の急な倒立運動についてであった。しかし物体の

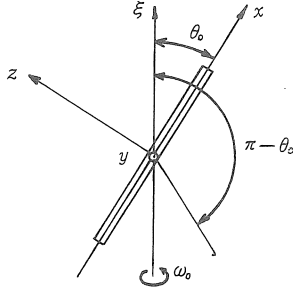


図5 板状物体の振動

回転を、 $x$  軸に対して傾斜した  $\xi$  軸まわりに回転させた場合には、物体は定常回転することなく、ある角度の範囲内で、振動を続ける。

図5に示すように、簡単のため板状物体の振動を取り上げる。まず板面に沿う慣性主軸の  $x$  軸に対して  $\theta_0$  の傾きを持ち、同じ面に沿う  $y$  軸に垂直な  $\xi$  軸まわりに  $\omega_0$  の角速度で回転させる。この場合、 $\xi$  軸まわりの慣性モーメント  $I_{\xi_0}$  は  $I_{\xi_0} = (1 + a \sin^2 \theta_0) I_x$  であり、物体が更に傾いて、 $x$  軸と  $\xi$  軸の角度が  $\theta$  となった場合の角速度を  $\omega_\xi$  とすれば、角運動量保存則より次式が成り立つ。

$$\omega_\xi = \frac{(1 + a \sin^2 \theta_0) \omega_0}{1 + a \sin^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (5-1)$$

運動エネルギー保存則で2倍をとり、次式を得る。

$$(1 + a \sin^2 \theta_0) I_x \omega_0^2 = (1 + a \sin^2 \theta) I_x \omega_\xi^2 + a I_x \omega_y^2 \quad \dots\dots\dots (5-2)$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0 + a \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 - a \sin^4 \theta_0}{1 + a \sin^2 \theta}} \omega_0 \quad \dots\dots\dots (5-3)$$

$\omega_y$  は  $\theta = \theta_0$  および  $\theta = \pi - \theta_0$  の場合ゼロとなり、 $\theta = \pi/2$  の場合最大値をとる。したがって物体は静止軸  $\xi$  軸まわりに回転しながら、 $\xi$  軸に垂直な  $y$  軸まわりに  $\omega_y$  の角速度で、 $x$  軸と  $\xi$  軸との角度が  $\pi/2$  を中心として、 $\theta_0$  から  $\pi - \theta_0$  の間で振動することになる。また式 (5-3) を2乗して時間  $t$  で微分するか、または回転モーメントと角加速度の関係より  $d\omega_y/dt$  を求めると、次式を得る。

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{\sin 2\theta (1 + a \sin^2 \theta_0)^2}{2 (1 + a \sin^2 \theta)^2} \omega_0^2 \quad \dots\dots\dots (5-4)$$

$\theta = \theta_0$  および  $\pi - \theta_0$  の場合、 $\omega_y$  はゼロであるが  $d\omega_y/dt$  はある大きさを持ち、 $\theta = \pi/2$  でゼロとなる。 $\omega_y$  は  $\theta$  が  $\theta_0$  または  $\pi - \theta_0$  になった瞬間にゼロになるだけで、 $d\omega_y/dt$  がある大きさを持つので、

物体はその角度で、 $y$  軸まわりに留まることは無い。以上は、物体が静止した  $\xi$  軸まわりに  $\omega_\xi$  で回転し、 $\xi$  軸に垂直な  $y$  軸まわりに  $\xi$  軸と  $x$  軸との角度が、 $\theta_0$  から  $\pi - \theta_0$  の間で回転振動する場合の  $\omega_\xi$ 、 $\omega_y$ 、 $d\omega_y/dt$  を求めた。 $\xi$  軸に垂直な  $z$  軸まわりの回転振動については、同様であるので省略する。

特別な場合として、 $x$ 、 $-x$  の点に質量  $m$  の質点があって、両質点を質量の無い棒で連結した場合を考える。この場合は  $I_x = 0$ 、 $I_y = I_z = 2mx^2$  である。板の場合と同様、 $x$  軸と  $\theta_0$  の角度を持った  $\xi$  軸まわりに、 $\omega_0$  の角速度で回転させ、図6位置で自由にしたとする。この場合は板の場合と異なり、 $y$  軸まわりに振動回転しない。この場合は、図の  $z$  軸まわりに、定常

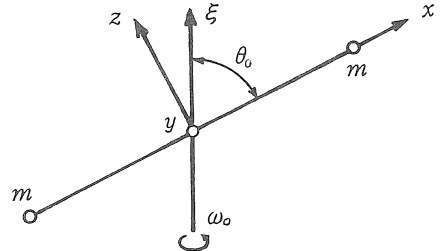


図6 2個の質点の定常回転

回転を続けることになる。振動すると説明してある書物があるので、間違わないようにしたい。2個の質点を  $\xi$  軸まわりに回転させると、図6の位置では、質点の速度は2個とも紙面に垂直で、方向が反対である。この位置で外力を除き自由にさせれば、2個の質点を連結する棒があるので、図  $z$  軸まわりに等速回転を続ける。もし連結棒が無ければ、図の位置で紙面に垂直で、互に反対方向に等速直線運動をする。2個の質点では無く、 $x$  軸方向の細い棒の場合も、同じ定常回転をする。

任意形状の物体の場合も、座標軸を図5の板の場合と同様にする。角度  $\theta_0$  で  $\omega_0$  の角速度で回転させ、物体が更に傾いて  $\xi$  軸との傾き角が  $\theta$  になった場合の角速度を  $\omega_\xi$  とすると、物体の慣性モーメント  $I_\xi$  は式 (3-5) で表されるので  $\omega_\xi$  は次式となる。

$$\omega_\xi = \frac{1 + a \sin^2 \theta_0 + b \cos^2 \theta_0}{1 + a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta} \omega_0 \quad \dots\dots\dots (5-5)$$

また運動エネルギー保存則よりその2倍をとり、次式が得られる。



$$(1 + a \sin^2 \theta_0 + b \cos^2 \theta_0) I_{xx} \omega_0^2 = (1 + a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta) I_{xx} \omega_x^2 + (a+b) I_{xx} \omega_y^2 \quad \dots (5-6)$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{a(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0) + b(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0) + a^2(\sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 - \sin^4 \theta_0) + ab(\sin^2 \theta \cos^2 \theta_0 + \cos^2 \theta \sin^2 \theta_0 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta_0) + b^2(\cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 - \cos^4 \theta_0)}{(a+b)(1 + a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)}} \omega_0 \quad \dots (5-7)$$

$d\omega_y/dt$  は、角加速度と回転モーメントの関係または上式より

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{(a-b) \sin 2\theta}{(a+b) 2} \frac{(1 + a \sin^2 \theta_0 + b \cos^2 \theta_0)^2}{(1 + a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)^2} \omega_0^2 \quad \dots (5-8)$$

式(5-7) および(5-8) の  $b$  をゼロにすれば、それぞれの板の場合の式(5-3) および(5-4) と一致する。

$\theta = \theta_0$  の場合、式(5-3) および(5-7) より、 $\omega_y$  はゼロになるが、 $d\omega_y/dt$  は式(5-4) および(5-8) よりゼロではない。これは  $\theta = \theta_0$  の場合でも、 $y$  軸まわりの回転のモーメントがあるためであるから、先に述べた  $\theta_0$  がほぼゼロのため、ある回転数で常回転する場合と異なり、直ちに  $y$  軸まわりの回転を始める。

以上は任意形状の物体を、 $x$  軸に対し  $\theta_0$  の角度で、 $y$  軸に垂直な  $z$  軸まわりに、 $\omega_0$  の角速度で回転させてから自由にした場合の運動を述べた。この場合は  $z$  軸まわりに回転しながら、角度  $\pi/2$  を中心として、角度  $\theta_0$  から  $\pi - \theta_0$  の間で、 $y$  軸まわりに回転振動をする。この回転振動の角速度、角加速度の式を示した。しかし  $\theta_0$  が大きく、 $\pi/2$  に近い場合には、 $\omega_x$  は近似的に  $\omega_0$  に等しく、また  $\theta$  は  $\theta_0$  と  $\pi - \theta_0$  の間の角度であるから、 $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$  とすれば、 $\phi$  の値は小さい。 $\omega_y = d\theta/dt$  であるから  $d\omega_y/dt = -d^2\phi/dt^2$  となる。よって式(5-8) より、近似的に次式が成り立つ。

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{(a-b)}{(a+b)} \omega_0^2 \phi = 0 \quad \dots (5-9)$$

したがってこの物体の  $y$  軸まわりの振動周期  $T$  は

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad \dots (5-10)$$

となる。板の場合は  $b = 0$  であるから、 $T = 2\pi/\omega_0$  となり、 $\omega_0$  が毎秒1回転であれば、1秒でもとの位置へ戻る。これは前述の質点や棒の場合と同じく、定常回転を示して振動しないが、これは  $\phi$  が小さい場合のみに成り立つ。

以上  $y$  軸まわりの回転振動について述べたが  $z$  軸まわりについても同様に求まる。しかし  $z$  軸まわり

は倒立の場合と同様、 $y$  軸まわりに比べて振動が起きにくいので省略する。

## 6 結 言

無重力場で、物体の慣性主軸方向に回転を与えた場合の倒立運動と、慣性主軸方向とある角度をなす方向に回転を与えた場合の振動について、角速度、角加速度を与える式を求めた。式の誘導には、角運動量保存則、運動エネルギー保存則、角加速度と回転モーメントの関係を用いた。これらの法則や関係式は、無重力場で真空中では厳密に成立するので、本文で述べた式は、いずれも実験で確認する必要の無いものばかりである。オイラーの方程式に関しては、二つの角速度成分の積の項は、物体を倒立または振動させる回転モーメントを表す。その項の角速度成分は、角運動量が保存される静止した軸まわりの回転の、慣性主軸方向成分であることを示した。他方角加速度で示される角速度成分は、物体の倒立、振動を表す角速度の成分で前者と直角であることを明らかにした。

無重力場で回転する物体に対する角運動量保存則については、従来誤って書き表されているので、本論文により訂正されるよう希望する。この法則は、力学の基本をなすもので、重要であると考えからである。

## 文 献

- (1) 三次・ほか、宇宙からの宿題、日本機械学会 宇宙工学部門ニュースレター、6 (1993)、7。
- (2) 山田豊、宇宙船内の不思議な回転運動、日本機械学会誌、97-910、(1994)、794。
- (3) 例えば、戸田・田上・共訳、力学・新しい視点にたって、(1993)、204、培風館。
- (4) 例えば、原島鮮、力学・三訂版(1993)、209、裳華房。

(受理 平成7年3月20日)