

Kármán 渦列に関する一考察

伊藤 忠 哉・大 島 貴 充

A Study on the Kármán Vortex Streets

Tadaya ITO and Takamitsu OSHIMA

This report is concerned with the examination of the flow field induced by two parallel vortex streets, from the viewpoint of the internal wave theory.

The characters of velocity wave described by the Kármán's model of vortex streets are compared with those of the internal wave propagating in the primary flow of rectangular velocity distribution, and similarity of both waves is discussed.

The internal wave in the wake type primary flow field is also studied.

The results of this study showed that the flow field described by the Kármán's model can be recognized as the field of the propagating nonlinear internal wave in the primary flow of rectangular type.

1. まえがき

流体の流れの中に置かれた種々の物体によって形成される後流については従来多数の報告が行われている。しかし後流のモデル化という見知からすれば、(1)後流の安定性の問題に関連して多用される、波動形の攪乱（内部波）の消長を論ずる解析的手法¹⁾²⁾、(2)近年における電算機の性能向上に依拠した、いわゆる離散渦法³⁾⁴⁾⁵⁾ (discrete vortex method) が活発に用いられている現状である。しかし上記両手法相互の関連性に関する報告は殆んど見当たらない。本研究は上記両者の関連性をしらべることにより、それらの手法の得失ならびに当面する問題への適用の可否に関する判断基準についての知見を求めることを目的とする。ただし本報では、その第1階梯として、よく知られたカルマン (Th.von Kármán) の渦列モデルを対象とし、離散的に配列された渦糸の誘導速度によって形成される流れ場を、伝播する内部波の場とみる立場から検討する。また一般の物体後流は上記モデルと異なり、平面的に分布する渦度をもつことから、渦度をもつ代表的な速度分布の後流を選び、これを内部波に視点を置く立場から検討し、上記渦列モデルと対比する。

2. カルマン渦列による内部波

本章では周知ではあるがカルマンの渦列モデルのうち、後の議論に関連する部分について簡単な記述を行なうとともに、上記モデルの表現する流れ場が、2箇の渦列の間に形成される長方形速度分布を持つ平行流の場（主流の場）を伝播する内部波の場にはかならないことを指摘する。

2. 1 考察の対象とする渦列

周知のように、カルマンは流れの中におかれた物体の後流の振動に関連して渦の配列の安定性に関する研究を行ない2編の著名な報告⁶⁾⁷⁾をおこなった。その結果によれば、2本の平行線上に等間隔に無限に並び、かつ一つの直線上の渦糸の回転の向きは同一であり、他の直線上の渦糸の回転は逆向きである場合、渦列が全体として形を変えることなく直線方向に移動するのは、(1)図1に示すような互い違い形配列 (staggered arrangement) の場合と、2列の渦糸がx軸に関して対称の位置をとるいわゆる対称形配列 (symmetrical arrangement) の場合のみであること、(2)2列の渦は互い違い形配列の場合で、しかも渦の間隔aと2つの列の間隔bとの比 $K=b/a$ が特定の値をとるときのみ安定に存在しうることを述べた。その後多くの実験結果との対比が行われ、理論と実験の両者がかなりの一致を示すこと

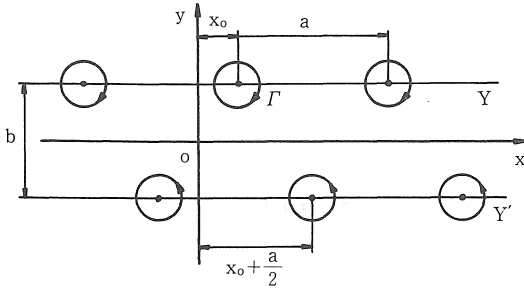


図1 カルマンの渦列

から、互い違い形配列でしかも安定な K の値をもつ渦列はカルマンの渦列と呼ばれるようになっている。しかし本報では K の値にかかわらず互い違い形配列のものをすべてカルマン渦列とよぶことにする。

本報告では考察の対象を互い違い形配列の場合のみに限り、対称形配列については触れない。またカルマンは渦列と流れの中に置かれた物体の抵抗との関係をも論じているが、この問題についても本報では論じない。なおカルマンの議論は完全流体、二次元流れの前提に立っているが、本報の考察も同じ前提に立つ。

2, 2 カルマンの渦列による流れ場

カルマンの理論は周知であるにも拘らず、このモデルの示す流線や流脈の形、さらにモデルの内包する流れ場の性格について詳細な検討をした報告は必ずしも多くはない。

さてカルマンによれば、図1の渦列の複素ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\bar{W} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\log \left\{ \sin \frac{\pi}{a} (Z - Z_0) \right\} - \log \left\{ \sin \frac{\pi}{a} (Z - Z_1) \right\} \right] \quad (1)$$

ここに、 Γ : 渦糸の循環、 a : 渦糸間の間隔、

$$Z_0 = x_0 + i \frac{b}{2}, \quad Z_1 = \left(x_0 + \frac{a}{2} \right) - i \frac{b}{2}$$

である。

したがって速度場は $d\bar{w}/dZ = u - iv$ より次の形となる。

$$u = \frac{\Gamma}{2a} \left\{ \frac{-\sinh \frac{2\pi}{a} (y - y_0)}{\cosh \frac{2\pi}{a} (y - y_0) - \cos \frac{2\pi}{a} (x - x_0)} \right\}$$

$$+ \frac{\sinh \frac{2\pi}{a} (y - y_1)}{\cosh \frac{2\pi}{a} (y - y_1) - \cos \frac{2\pi}{a} (x - x_1)} \quad (2.1)$$

$$v = \frac{\Gamma}{2a} \left\{ \frac{\sinh \frac{2\pi}{a} (x - x_0)}{\cosh \frac{2\pi}{a} (y - y_0) - \cos \frac{2\pi}{a} (x - x_0)} - \frac{\sinh \frac{2\pi}{a} (x - x_1)}{\cosh \frac{2\pi}{a} (y - y_1) - \cos \frac{2\pi}{a} (x - x_1)} \right\} \quad (2.2)$$

ここに、 u : 速度の x 方向成分、 v : 速度の y 方向成分である。

また渦列の移動速度は次式で与えられる。

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{2a} \tanh \frac{\pi b}{a} \quad (3)$$

なお前にも記したように普通カルマン渦列なる語は、渦列が不安定にならないための必要条件

$$\cosh^2 \frac{\pi b}{a} = 2 \quad \left(\frac{b}{a} = 0.2806 \right) \quad (4)$$

を満たす配列の渦列を意味するが、以下の議論では b/a なる比は任意とする。

さて以下、式(2), (3)を用いて検討を進める。

まず渦糸の配列の、 x 方向の空間的周期 a なる区間における速度 u, v の平均値 \bar{u} と \bar{v} を式(2.1), (2.2)によって求めれば、次の結果を得る。すなわち

$$\bar{u} = \begin{cases} 0, & \frac{b}{2} < y \\ \frac{\Gamma}{a}, & -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0, & y < -\frac{b}{2} \end{cases}, \quad \bar{v} = 0 \quad (5)$$

これは2つの渦列間には Γ/a なる大きさの長方形速度分布をもつ平行流が誘導されていることを示している。このことは以下のように考えることによって容易に導くことができる。すなわち、図1中の Y なる直線上にならぶ渦糸を、大きさ $|\Gamma|$ ($\Gamma < 0$) なるパルス列とみなせば、その Fourier 級数による表現は次式のようになる。

$$\gamma = \frac{\Gamma}{a} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \frac{2\pi}{a} x' \right) \quad (6)$$

ただし、座標 x' は1箇の渦糸の位置を原点とし x 軸に平行にとった座標、 Γ は渦の強さ(循環)である。すなわち周期 a の渦列は単位長さ当り $|\Gamma|/a$ の強さで直線 Y 上に一様に分布する渦層と、正弦波状に

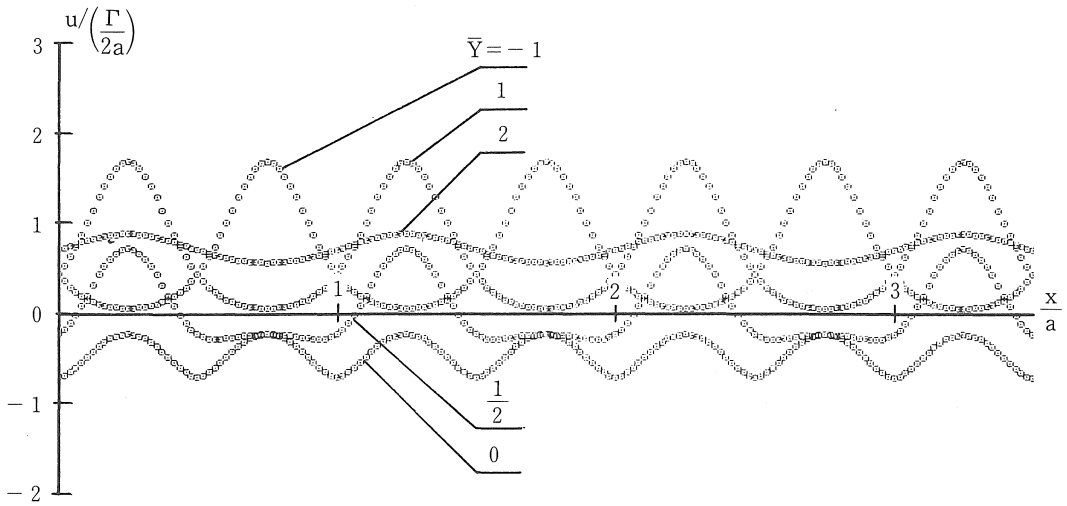


図2 速度波の波形 (u成分)

強さを変えながら同一直線上に分布する無限箇の渦層の総和と等価である。同様に直線 Y' 上に並ぶ渦列も $|\Gamma|/a$ の強さをもち、逆方向の回転をもつ渦層を含む。そして強さ $|\Gamma|/a$ をもち、互に逆方向に回転する平行な 2 箇の渦層間の流れは $u = \Gamma/a$ なる長方形速度分布の平行流であることはよく知られている。

図 2 に y の種々の値における速度成分 u の変化の様態を、渦列の移動速度で左方に動く座標に準拠して示した。ただし図では、横軸 x は a で、また縦軸 u は $\Gamma/2a$ で無次元化し、さらに b/a の値は渦列が安定に存在するとされる 0.2806 にとり、パラメータ \bar{Y} は $\bar{Y} = y / (\frac{b}{2})$ である。以上から知れるように 2 列の平行な互い違い渦列による流れ場は、大きさ $|\Gamma|/a$ なる長方形速度分布をもつ主流場を、波動速度

$$C = \frac{\Gamma}{2a} \tanh \frac{\pi b}{a}$$

で伝播する (図 1 に示す渦糸の回転方向の場合には x の負の方向へ) 渦糸以外には渦度をもたない非線形速度波の場として理解することができる。

2. 3 長方形速度分布をもつ主流場における内部波

前節では、渦列による流れ場が、長方形速度分布をもつ主流場を伝播する非線形内部波として理解できることを示した。本節では前節とは逆に、長方形速度分布をもつ主流場における内部波を考察し、そ

の結果と前節のそれとを対比する。ただし解析は平行流の安定性理論で多用されるように、主流に生起する波動形攪乱の大きさを 1 位の微小量とする前提下におこなう。さて解析の基礎とする方程式は Euler の運動方程式および連続式とする。また主流 (波動を含まない時の流れ) は層流とし次の形におく。

$$u = \bar{U}(y), \quad v = 0, \quad p = P(x) \quad (6)$$

ここで、 p : 運動学的圧力 [kinematic pressure (圧力/流体密度)] である。

次に流れ場を主流と攪乱 (\sim を付して表す) より成るとして次の形におく。

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{U}(y) + \tilde{u}(x, y, t) & (7.1) \\ v &= \tilde{v}(x, y, t) & (7.2) \\ p &= P(x) + \tilde{p}(x, y, t) & (7.3) \end{aligned} \right\} (7)$$

式(7)を連続式および運動方程式に用い、その際微小攪乱の前提を用いて基礎式群を線形化すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_x + \tilde{v}_y &= 0 & (\text{連続式}) & (8.1) \\ \tilde{u}_t + \bar{U} \tilde{u}_x + \bar{U} \tilde{v}_y + \tilde{p}_x &= 0 & (8.2) \\ \tilde{v}_t + \bar{U} \tilde{v}_x + \tilde{p}_y &= 0 & (8.3) \end{aligned} \right\} (8)$$

上式中の添字 t と例えば \tilde{u}_t は \tilde{u} の t に関する偏微

分を意味する。

次にまず上式の複素解（ $\hat{}$ を付して表す）を波動形とし次の形におく。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(x, y, t) &= U(y)e^{i\alpha(x-ct)} & (9.1) \\ \hat{v}(x, y, t) &= V(y)e^{i\alpha(x-ct)} & (9.2) \\ \hat{P}(x, y, t) &= P(y)e^{i\alpha(x-ct)} & (9.3) \end{aligned} \right\} (9)$$

ここに、 α ：波数(正実数)， C ：波動の位相速度(複素数)， U, V, P ：それぞれの量の固有関数である。

式(9)を式(8)に用いれば固有関数に関する次の諸式を得る。

$$\left. \begin{aligned} i\alpha U + V' &= 0 & (10.1) \\ i\alpha(\bar{U}-C)U + \bar{U}'V + i\alpha P &= 0 & (10.2) \\ i\alpha(\bar{U}-C)V + P' &= 0 & (10.3) \end{aligned} \right\} (10)$$

ここに文字の右肩に付した'は y に関する微分を表す。式(10)から P, U を消去すれば次式を得る。この方程式は Rayleigh の式として知られている。

$$V'' = \left(\frac{\bar{U}''}{\bar{U}-C} + \alpha^2 \right) V \quad (11)$$

式(11)から無限遠では攪乱の振幅が0となるとの境界条件を満たすように $V(y)$ を解けば式(10)により U, P も求まり、さらに式(9)の複素解の複素共役(*印を付して表す)もまた式(8)を満たすことから、攪乱の実数解は、たとえば $\bar{u} = (1/2)(\hat{u} + \hat{u}^*)$ のように求まる。

さて以下に式(11)を基礎式とし長方形速度分布の主流場における内部波の性格を Rayleigh の代数的解法を援用して検討した結果を記す。すなわち今の場合主流は次式で表される。

$$\bar{U}(y) = \begin{cases} 0 & , \frac{b}{2} < y \\ -\bar{U}_0 (\bar{U}_0 > 0), & -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0 & , y < -\frac{b}{2} \end{cases} \quad (12)$$

なお計算の手順は次の様である。すなわち上記 y に関する3箇の領域に対する一般解をそれぞれ求め、主流が不連続に変化する $y = \frac{b}{2}$ および $y = -\frac{b}{2}$ の位置においては、 V および、式(11)を積分して得られる $\{(\bar{U}-C)V' - \bar{U}V\}$ なる量が連続であるとの条件

を用いて、波動の位相速度 C と波数 α の関係および固有関数 $V(y)$ を求める。式(12)の主流に対しては次の結果となる。すなわち、

(i) 固有関数は $V(y) = A \cosh \alpha y$ ，すなわち偶関数のとき

$$C = -\frac{\bar{U}_0}{\alpha} e^{-\frac{\alpha b}{2}} \left\{ \alpha \sinh \frac{\alpha b}{2} + \delta \cosh \frac{\alpha b}{2} \right\} \quad (13.1)$$

(ii) $V(y) = A \sinh \alpha y$ ，すなわち奇関数のとき

$$C = -\frac{\bar{U}_0}{\alpha} e^{-\frac{\alpha b}{2}} \left\{ \alpha \cosh \frac{\alpha b}{2} + \delta \sinh \frac{\alpha b}{2} \right\} \quad (13.2)$$

ここに、 A ：波動の振幅を表わす任意定数， δ ：1なる大きさをもち波数と次元を同じくする量を表わす。

なお固有関数 $V(y)$ が y の偶関数である(i)の場合がカルマン渦列の互い違い形配列の場合に、また奇関数である(ii)の場合が対称形配列の渦列に対応している〔式(2.2)参照〕。なお C の表式の右辺の負号は波動の伝播の向きが主流の向きと同じであることを示している(このこともカルマンのモデルと一致している)。なお式(13)を用い、式(10)、(9)により求めた \bar{u}, \bar{v} の実数解から算出した流れ場における渦度は、主流の境界線上における速度の不連続を無意味する“一様に分布する”渦層を除きその他のすべての領域で0となることを導くことができる。すなわち微小攪乱の前提下で長方形速度分布の主流の場に生起する内部波はポテンシャル流れであり、また位相速度は常に実数値となり、カルマン渦列および対称形配置の渦列モデルの流れ場と類似の性格を示す。

3. 渦度をもつ主流場における内部波およびカルマン渦列の流れ場との類似性

前章では2つの平行な直線上にのみ渦度が分布する主流場においても内部波の存在が可能であり、その波動の示す流れ場は当然のことながら(Helmholtzの定理から)ポテンシャル流れとなることを述べた。しかしたとえば物体の後流や噴流などでは、流体の粘性に基因してその流れ場は殆んど必ず渦度をもつ。そこで本章では渦度を有する流れ場の代表例として物体後流によくみられる速度分布をもつ主流場を用い、そこに生起する内部波の性格をしらべ、これをカルマンの渦列モデルと対比することによ

て、同モデルの内包する意味について考察を加える。なお以下の考察においても流体は完全流体と前提する。

3. 1 対象とする主流場と生起する内部波

対象とする主流は一樣流中に置かれた物体の後流をモデル化した次の形とする。すなわち

$$\bar{U} = \bar{U}_\infty - \bar{U}_c \operatorname{sech}^2 ky \tag{14}$$

ここに、 \bar{U}_∞ ：無限遠における一樣流速、 \bar{U}_c ：流れの中心軸 (x 軸) 上での欠損速度、k：後流の x 軸と垂直な方向 (y 軸方向) への拡がりをも定めるパラメータである。

なお式(14)で $\bar{U} = 0$ とおけば、静止流体中を左方 (x の負方向) に動く物体の後流を表わす。

以下に Rayleigh の式 [式(11)] を基礎式として波動形攪乱を解く。式(14)を式(11)に用いれば次式をうる。

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \left\{ \frac{6\bar{U}_c k^2 \operatorname{sech}^2 ky \left(\operatorname{sech}^2 ky - \frac{2}{3} \right)}{\bar{U}_\infty - \bar{U}_c \operatorname{sech}^2 ky - C} + \alpha^2 \right\} V \tag{15}$$

固有関数 V が y の偶関数である解を求める方針で、

$$V = A(\cosh \beta y)^{-m}$$

なる形を試みると次の実数解を得る。すなわち、

$$m = 2, C = \bar{U}_\infty - \frac{2}{3} \bar{U}_c, \alpha = 2k, \beta = k$$

$$V = A \operatorname{sech}^2 ky \tag{16}$$

ここに、A：攪乱の振幅に対応する量である。

なお式(15)は位相速度 C が複素数となる解 (増幅あるいは減幅する解) をもち得るが、ここではカルマンの渦列モデルとの定性的対比を目的とすることから、定常振幅の解に対応する上記の実数解のみに議論の対象を限定する。さて式(16)を式(10)、(11)に用いて攪乱の表式が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= A \sin ky \cdot \operatorname{sech}^2 ky \cdot \sin 2k(x-ct) \tag{17.1} \\ \tilde{v} &= A \operatorname{sech}^2 ky \cdot \cos 2k(x-ct) \tag{17.2} \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

いま $\bar{U}_\infty = 0$ すなわち物体が左方 (x の負方向) に動いたときの後流の場合を考えれば、式(16)から $C < 0$ であり、式(17)の形の内部波が左方に伝播することが知られる。

3. 2 流れ場における渦度の分布

カルマン渦列との対比のため、まず前節で得た流れ場における渦度分布の様態をしらべる。渦度を

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{18}$$

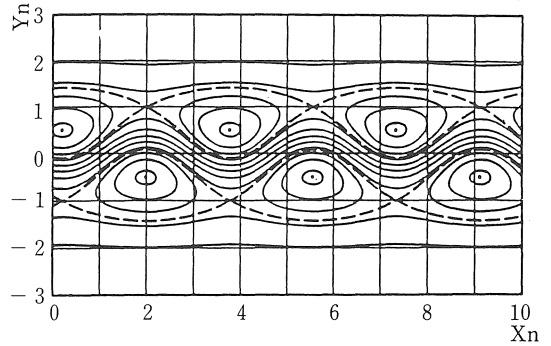


図3 渦度の分布 (等渦度線)
(波動の位相速度で動く座標系)
 $\zeta = 1.0, \bar{a} = 0.236$

で定義し、かつ位相速度に等しい速度で左方に移動する座標系 [(X, y) 座標系, $X = x - ct$, この座標系からみれば波動の形は不変に保たれる] に準拠すれば、渦度の表式が次の形に得られる。

$$\gamma = -3Ak \operatorname{sech}^4 ky \cdot \sin 2kX - 2k\bar{U}_c \operatorname{sech}^2 ky \cdot \tanh ky \tag{19}$$

いま上式を用いて渦度が極大および極小値をとる座標点の位置を求めれば次の結果となる。すなわち (i). γ が極値となるための必要条件を満たす点の X 座標は、

$$X = (2n+1)\pi/2\alpha, n = 0, 1, 2, \dots, \left. \begin{aligned} &\left(\frac{\pi}{2\alpha} \text{は} \frac{1}{4} \text{波長} \right) \tag{20.1} \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

(ii). y 座標は次式の根である。

$$\frac{6A}{\bar{U}_c} = \frac{(1 - 3 \tanh^2 ky)}{\tanh ky \cdot \operatorname{sech}^2 ky} \tag{20.2}$$

そして、上記の座標点は、(1) n が偶数のときは、 $y \geq 0$ なる各領域に於いて $\frac{1}{3} \geq \tanh^2 ky$ (複合同順) なる位置に存在する。(2) n が奇数のときは、 $\frac{1}{3} \leq \tanh^2 ky$ なる位置に存在する。

(iii). 上記(i)(ii)で与えられる極値の性格は、(1) n が偶数のとき $y > 0$ なる領域のものが極小値、また(2) n が奇数のとき $y < 0$ の領域のものが極大値となる。

以上(i)~(iii)の結果により、極大および極小の渦度をもつ点は、カルマン渦列と定性的には同様な配列をとることがわかる。図3に一計算例を示す。ただし図は $\bar{U}_\infty = \bar{U}_c$ なる一樣流 [式(14)参照] が存在する場合に対して描いてある。なお速度は \bar{U}_∞ で、長さは欠損速度の半値幅 d で無次元化して示した ($Xn = \frac{X}{d}$,

$Y_n = \frac{Y}{d}$ 。計算条件は、 $\xi = \bar{U}_c / \bar{U}_\infty = 1$, $\bar{a} = A / \bar{U}_\infty = 0.236$ である。

3. 3 位相速度で移動する座標面上における不動点の性格

本節では前節と同様に、波動形攪乱の位相速度で移動する座標系に準拠して、流体粒子の流跡を考察し、上記座標面上には2種類の不動点(特異点)が存在することを示し、カルマンの渦列モデルと対比してその類似性をしらべる。この座標面上での流体粒子の流跡の方程式は次式で表わされる。

$$\frac{dx}{\bar{U}(y) + \bar{u}} = \frac{dy}{\bar{v}} = dt \tag{21}$$

ここに、 $\bar{U}(y)$: 移動する座標系からみた主流の速度である。

すなわち、式(11), (17)より

$$\frac{dx}{dt} = \bar{U} + \bar{u} = -U_c \left(\text{sech}^2 ky - \frac{2}{3} \right) + A \sinh ky \cdot \text{sech}^3 ky \cdot \sin 2kx \tag{22.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \bar{v} = A \text{sech}^2 ky \cdot \cos 2kX \tag{22.2}$$

上式より $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ を満たす不動点(特異点)の座標が次式のように求まる。すなわち X 座標は

$$X = (2n+1)\pi/2\alpha, \quad n=0,1,2,\dots \tag{23.1}$$

また y 座標は次式の根となる。

$$\frac{3a}{\bar{U}_c} = \frac{1 - 3 \tanh^2 ky}{\tanh ky \cdot \text{sech}^2 ky} \tag{23.2}$$

そして、式(23.2)を満たす y の値は、(1) n が偶数のとき、 $y \geq 0$ なる各領域に応じて $\frac{1}{3} \geq \tanh^2 ky$ なる条件を満たす範囲に存在し、 $y > 0$ なる領域に存在する不動点は渦心点 (centre), また $y < 0$ なる領域のそれは鞍点 (saddle point) であること、(2) n が奇数なるときは、 $y \geq 0$ に応じて $\frac{1}{3} \leq \tanh^2 ky$ の範囲に存在し、 $y \geq 0$ に応じてそれぞれ鞍点および渦心点となること、また式(20)の結果と比較すれば、不動点の X 座標は渦度が極値をとる点のそれに一致すること、また渦心点と渦度が極値をとる点とは、x 軸に関して y の同符号側に位置すること、さらに波動の振幅 A が、 $A \rightarrow 0$ の極限においては渦心点は渦度が極値をとる点に一致することなどの結果を導くことができる。上記の $A \rightarrow 0$ の極限において渦度

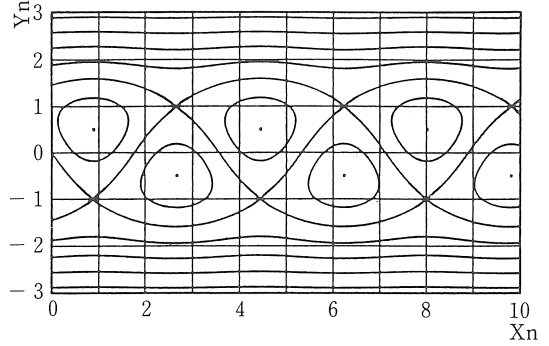


図4 流線の形状
(波動の位相速度で動く座標系)
 $\xi=1.0, \bar{a}=0.471$

が極値をとる点は主流そのものの渦度が極値をとる点に他ならず、このことはカルマン渦列の場合に渦糸の位置が、主流(渦列の間に誘起される平行流)において渦度が極値となる点(渦糸以外では渦度がすべて0である)であり、また渦糸は渦心点と考えることに対応している。なお図4に位相速度で移動する座標上における流線の一例を示した。ただし同図は、前掲図3の場合と同様、一樣流($\bar{U}_\infty \neq 0$)が存在する場合に対して描いてある。計算条件は、 $\xi = 1$, $\bar{a} = 0.471$ である。渦心点、鞍点の分布が明瞭にみられる。

さて以下に上記の結果をカルマンの渦列モデルからの計算結果と対比する。この場合には式(22)の $\bar{U}(y)$ にかえて式(2.1)から渦列の移動速度〔式(3)〕を差引いた値を、また \bar{v} にかえて式(2.2)を用い、渦列の移動速度で左方に動く座標系に準拠してその座標面上の不動点の存在ならびにその性格をしらべれば下記の結果が得られる。すなわち、(1) 2種類の不動点が存在し、その一つは渦糸であり、他は鞍点である。(2) 鞍点は渦糸(渦心点とみなし得る)と X 座標を同じくし、また y 座標は互いに逆符号となるなどの結果が導かれる。これらの結果は渦度を持つ後流〔式(14)参照〕についての前記の結果と定性的に殆んど完全に一致する。以上の検討により、カルマンの渦列モデルは、内部波動論的な視点からすれば一般には渦度が平面的に分布する(二次元流の場合)主流の特殊な場合、すなわち渦度が2つの直線上にのみ存在する主流の場を伝播する、y 軸に関して偶関数かつ有限振幅の内部波(非線形波動)を記述するのにはほかならないことが知れた。なお内部波と同

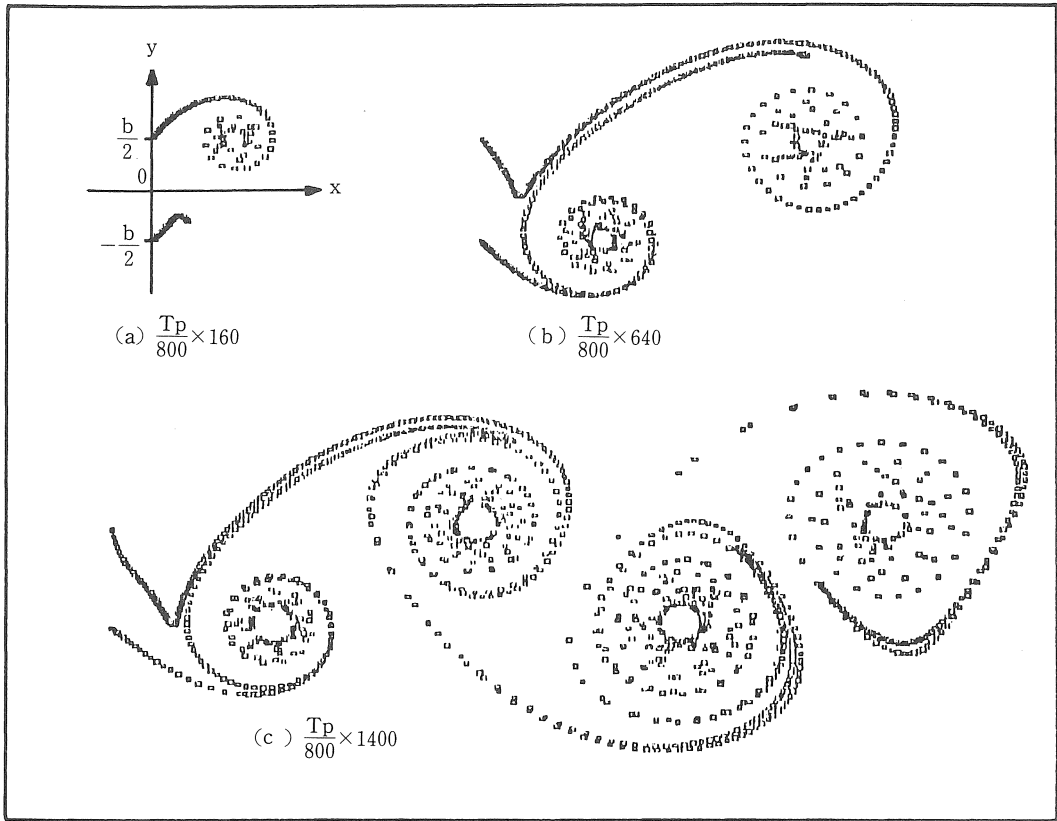


図5 カルマン渦列モデルの流脈線

T_p : 渦の周期, $S_t = 0.162$, $b = 1$

一速度で同じ向きに移動する座標面上に、渦糸の空間的周期 a と渦列の間隔 b (図1 参照) との比の値のいかんに関わらず鞍点形の不動点が存在するというカルマンモデルの解析結果は、互い違い形に配列する渦列は比 b/a に関らず、すべて不安定であることを指唆しているが、渦列の安定性に関する詳細な検討は別稿にゆずる。

4. カルマンの渦列モデルによる流脈線

カルマンの渦列モデルが示す流線の形状についてはいくつかの報告に示されているが、流脈線については著者らの知る限り、その計算例をみない。理由は数値計算のわずらしさに因るものと推察される。図5, (a), (b), (c)に式(2)を用いて電算機によって求めた流脈線の一計算例を示す。計算条件は、 $b/a = 0.2806$, 2本の流脈の始点の間隔は $b = 1$, ストローハル数 $St = 0.16$ である。(a), (b), (c)は順次時間経過に応ずる流脈線の形を示す。また図中の各点は渦の

放出周期の $1/800$ の時間間隔で、 $x = 0$, $y = \pm \frac{1}{2}$ なる座標点を出発した流体粒子の位置を示している。図にみるように、各計算点を連ねて得られる流脈線は、円柱後流の可視化実験によって観察される実際の流脈線が、後流の拡散の効果によって下流にゆく程次第に拡大する点を除けば、定性的には良く類似した形状を示している。このことはまた内部波動の振幅がある程度以上の大きさであれば、その形状は図5のそれと類似のものとなることを意味している。

5. むすび

本報においては離散的に配列する渦糸の列の代表例としてカルマンの渦列モデルを考察の対象にとり、離散的に直線上に配列する渦糸によって誘導される流れ場は、渦糸の配列に対応して定まる主流場とそこに生起する内部波の和として等価的に考察し得ることの可能性を指摘し、離散渦法の適用に当たっての一知見を得た。終りに流脈線の数値計算に当っ

て御協力を得た名古屋大学の末松良一，中本剛，加藤典彦の諸氏に謝意を表する。

6. 参考文献

- 1) Nishioka M. and Sato H.: Mechanism of Determination of the Shedding Frequency of Vortices Behind a Cylinder at Low Reynolds Numbers, *J. Fluid Mech.*, 89, 49, 1978.
- 2) Taneda S.: The Stability of Two-Dimensional Laminar Wakes at Low Reynolds Numbers, *J. Phys. Soc. Japan*, 18, 288, 1963.
- 3) Rosenhead L.: The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity, *Proc. Roy. Soc. Lond., A*, Vol. 134, 170-192, 1931.
- 4) Kamemoto K. Formation and Interaction of Two Parallel Vortex Streets, *Bull. JSME*, Vol. 19, No. 129, 283-290, 1976.
- 5) 木谷・有江・古川：剪断流におけるうず列の形成，*機論*，B，45巻389号，1-10，1971.
- 6) カルマン著，谷一郎訳：飛行の理論，65，岩波，東京，1956.
- 7) Kármán Th. Von.: Über den Mechanismus des Widerstandes den ein Bewegter Körper in einer Flüssigkeit Erfährt, *Göttinger Nachrichten*, 509-517, 1912. 547-556, 1912.

(受理 昭和63年1月25日)