ロット生産方式の最適設計に関する研究

橋 本 俊 夫 ・ 金 指 正 和

A Study on the Optimal Design of the Lot Production System

Toshio HASHIMOTO ・ Masakazu KANEZASHI

〔概要〕 本研究は，ロット生産方式をとる職場での一般的条件を考え，ロット生産方式を設計，管理していく上での重点として，ロットサイズの決定，仕掛在庫の管理など，ソフトな生産管理システムの設計について述べる。そのために，より基本的なモデルを構成し，システムの諸要素間の相互関係を解析し，信頼性と経済性の高い管理システム設計のための基礎を提供する。

1. はじめに

ロット生産方式は，仕様は異なるが，同一の生産技術を用いて，同一の生産工程で，不特定多数の品目を，それぞれいくつかのロットに分割あるいは統合して，これらを段取替をすることによって生産してゆく方式である。多くの機械加工職場あるいは装置工業においては，このようなロット生産方式あるいはバッチ処理方式をとることにより，大規模な設備投資をして専用設備を何基も設置することなく，品目の大量需要と品目の多様化に対応してゆくことが生産管理上の重点となる。

ところで，現実の職場では，工程の型，工程の編成，生産品目数，品目の需要速度，加工手順，段取替時間，単位加工時間，運搬条件，在庫スペースの制約など，多くの要素が錯綜しており，管理の仕方を量産方式に較べて一層複雑にしている。このため，多くの場合，現場管理者や，現場の職班長の経験や勘に基づく管理がなされており，これまでのところ，ロット生産方式に関する体系的な設計理論を提供してくれる研究は少ない。

我々は，ロット生産方式をとる職場での一般的条件を考え，ロット生産方式を設計管理していく上での重点として，ロットサイズの決定，および各工程での作業開始，完了時点の指示など，ソフトな生産管理システムの設計のための体系的理論を得ることを目的として，より基本的なモデルを構成して，システムの諸要素間の相互関係を解析する。

2. 研究目的

従来，ロット生産方式の管理システムを対象とした研究は，ロットサイズ決定問題として古くから多くの理論的研究がなされてきた。既に1930年代に，単一工程で単一品目を生産する場合（以後これを単一工程単一品目モデルと呼ぶ）に，経済発注量（ＥＯＱ）の公式を適用した経済的ロットサイズの公式が提供されている。その後ロットサイズ決定問題は，単一工程で多品目を生産する場合（以後，単一工程多品目モデルと呼ぶ）に拡張され〔1〕，〔2〕，多段階工程単一品目モデルも扱われている。〔3〕，〔4〕，〔5〕.

しかしながら，これら研究の多くは，モデルに対する仮定が現実の職場に適用できないものが多く，数学的なエレガンスをねらったものである。我々は，現実の職場ではほとんどである，多段階工程による多品目生産方式（以後，多段階工程多品目モデルと呼ぶ）について，それを制約する問題点と目的関数，即ち，ロット生産方式設計上のねらいを明らかにする。

3. 多段階工程多品目モデルの記述

3.1 基礎概念

現実の職場では，多段階工程で多品目が生産されているのが一般的であるが，これらの生産方式を制約する問題，目的関数などの概念を明らかにするために，まず単一工程単一品目モデル，単一工程多品目モデル，および多段階工程単一品目モデルで，制約条件，目的関数など

の概念を定義する。

A．単一工程単一品目モデル

組立ラインに部品を連続的に供給する場合，組立ラインでの部品要求速度に較べ，部品の生産速度が極めて速い場合，部品をひとまとめにした部品を製造連又はロットと呼ぶ。

ロットを時間的に加工時間で換算した場合を，製造連の長さ，個数の単位の場合をlot sizeと呼ぶ。図１，図２はlot sizeの大きい場合と小さい場合について，実線で累積生産量，破線で累積要求量を表わしたものである。

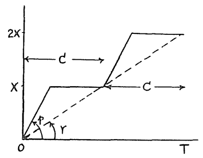

図１　ロットサイズが大　X＝T／2

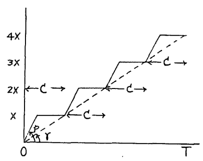

図２　ロットサイズが小　X＝T／4

図１，図２で，X，P，γは各々，

X；lot size（個）

P；生産速度（個/単位時間）

γ；要求速度（個/単位時間）

を表わす。この図で明らかなように，lot sizeが小さいと，在庫量（実線と破線に囲まれた面積）は小さいが，段取替（setup）が多くなる。

このモデルでの制約として，計画期間T内で総要求量Tγを加工完了しうるために，段取替時間を１回当りSとすれば，

$$ST\gamma/X+T\gamma/p\leqq T \qquad (1)$$

又は，変形して

$$X\geqq S\gamma/(1-\gamma/p) \qquad (2)$$

という制約がlot size Xに課される。

このモデルでの目的は，lot size Xを(2)式の範囲内で適当な方法で決めて，

$$\text{仕掛在庫量}=\gamma(\gamma-1/p)X/2 \qquad (3)$$

および

$$\text{段取替時間}=ST\gamma/X \qquad (4)$$

の関数としての在庫費用と段取替費用の和を最小にせしめることである。図１，図２で記号CはCycle timeと呼ばれ，以下の議論で重要となる。

B．単一工程多品目モデル

一つの工程で，同時に２種類以上の品目を加工することはできない。従って多品目を生産する場合は，前述のcycle timeを各品目とも等しくなるようにロットサイズを決める必要がある。このような生産の仕方をサイクリックスケジューリング（rotation cycle policy）と呼ぶ。

今，n品目を生産しているものとし，Xi，γi，piを各各，品目iのlot sizc，要求速度，生産速度とする。

このモデルでの制約は，各品目のcycle timeが等しくなる条件から

$$X_i=\gamma_i C \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n \qquad (5)$$

および，C内で各品目の製造連を完了さす条件より，Cに次の制約が課される。

$$C\geqq\sum_i(S_i+X_i/p_i) \qquad (6)$$

目的関数としては，仕掛在庫量及段取替数がそれぞれ，Cの関数として，

$$\text{仕掛在庫量}=\sum CT\gamma_i(1-\gamma_i/p_i)/2 \qquad (7)$$

$$\text{段取替数}=nT/C \qquad (8)$$

で与えられる。(7)式と(8)式から，費用関数を設定し，(5)式を(6)式に代入して得られるCに関する制約

$$C\geqq\sum S_i/(1-\sum\gamma_i/p_i) \qquad (9)$$

のもとで最小にせしめることである。

図３は２品目A，Bをrotation cycle policyで生産する場合の在庫量の推移とガントチャートを示したものである。

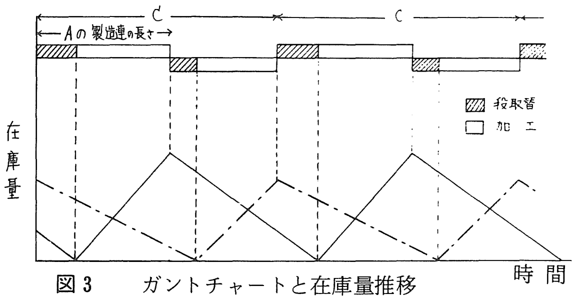

図３　ガントチャートと在庫量推移

C．多段階工程単一品目モデル

多段階工程の場合，重要な要素として，遊休時間と工程間仕掛待ち時間がある。

先行工程での生産が終了しておらず，しかも工程の前に手持ちの在庫がない場合は，後続工程は生産を開始できない。この状態を遊休状態という。又先行工程で生産を終了しても後続工程の作業が完了していないとき，後後工程が完了するまでの待ち時間を工程間仕掛待ち時間という。

先行工程での１ロット分が終了するまで，後続工程はそのロットに着手できない条件は一般的なものであり，先行工程で加工を終了したロットを１ロット分まとめて，乾燥や熱処理などを行った後，後続工程へ送る場合である。多段階工程モデルでは，この条件を，ロットの再分割は行なえない条件と呼ぶ。

図4は，これらの概念を示すガンチャートと在庫量の時間的推移を示したものである。

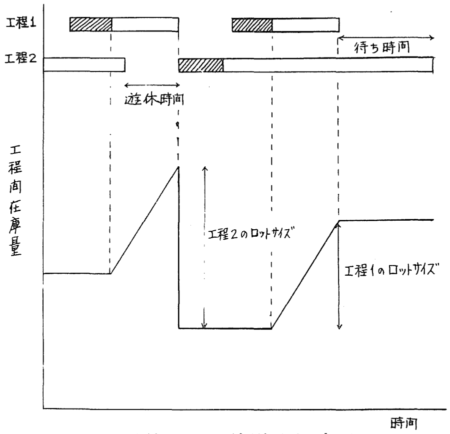

図4　遊休時間と仕掛待ち時間

以上の概念を用いて多段階工程多品目モデルを記述する。

3.2　モデルの条件

a)　要求速度

各品目の要求速度は計画期間を通じて一定である。

b)　工程の型

直列にM個の工程が配列され，最終工程（第M工程）からは連続的に部品が組立ラインに供給される。

c)　段取替時間

各工程での各品目の段取替時間は確率的変動はせず，品目間の投入順序で変化しない。

d)　単位加工時間

各工程の各品目1個当りの加工時間は既知で，確率変動はない。

e)　ロットの再分割，統合は行えない。

f)　最終製品（第M工程での完成品）に対する品切れは許されない。

以上の条件のもとで数学的モデルを構築するにあたり，記号を次のように約束する。

〔記　号〕

i；品目を表わす添字。　$i=1,2,\cdots\cdots n$。

j；工程を表わす添字。　$j=1,2,\cdots\cdots M$。

X_{ij}；lot size

C_j；cycle time

S_{ij}；段取替時間

γ_i；要求速度

p_{ij}；生産速度

τ_{ij}；一製造連の長さ

条件e）より工程間でロット分割，統合が行なわれないので，

$$X_i=X_{i1}=X_{i2}=\cdots\cdots=X_{iM}\quad i=1,\cdots\cdots,n \tag{10}$$

とおく。更に，rotation cycle policyによるスケジューリングを行うとすれば，各工程のサイクルタイムを等しくすればよいので，

$$C=C_1=C_2=\cdots\cdots=C_M \tag{11}$$

とおく。このとき，各品目の各工程に於ける製造連の長さは(12)式で求められる。

$$\tau_{ij}=S_{ij}+X_i/p_{ij} \tag{12}$$

もし，すべてのτ_{ij}が等しくなれば，Cycle time C_jは簡単に(13)式で計算できる。

$$C_j=\sum_i\tau_{ij}=\sum_i\tau_{ij+1}=C_{j+1} \tag{13}$$

この場合，各工程には遊休時間や各品目の工程間待ち時間は発生しないが，実際はτ_{ij}が異なるために，工程間に遊休時間や待ち時間が発生し問題を一層複雑なものにする。このように，多段階多品目生産の数学的モデルを構築する場合の本質的なむづかしさは，いかにして，遊休時間と工程間待ち時間をlot sizeの解析的関数として表現するかにある。

図5は遊休時間，工程間待ち時間，cycle timeの関係を図示したガントチャートである。

我々は(10)式と(11)式の条件のもとでの関数表現を次のように工夫して表わした。

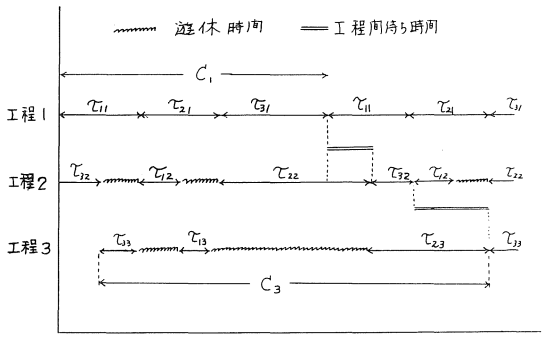

図5　多段階工程多品目モデル

T_{kj}をj工程で第k番目に加工される品目の製造連の長さとする。即ち，あるcycle time内で，第1工程では品目1，2，……，nの順に加工されるときは，第2工程では，n，1，2，……，n-1の順に加工されるから，

$$T_{12}=\tau_{n2},\ T_{22}=\tau_{12},\ \cdots\cdots,\ T_{n2}=T_{n-1,2}$$

となり，第3工程では，n-1，n，1，2，……，n-2の順に加工されるので，

$T_{13}=\tau_{n-1,3},\ T_{23}=\tau_{n3},\cdots,\ T_{n3}=\tau_{n-2,3}$

となる。同様に q_{kj} を j 工程で k 番目に加工される品目の生産速度とすれば,

$q_{12}=p_{n2},\ q_{13}=p_{n-1,3},\ q_{n4}=p_{n-3,4}$ etc.

が成りたつ。

以上の記号を新たに導入して，遊休時間と工程間待ち時間を表現しよう。

〔遊休時間〕

$$T_k=\max T_{kj}\quad k=1,2,\cdots\cdots,n \tag{13}$$

を，各工程でk番目に加工する製造連の長さの最大のものとする。このときcycle timeは

$$C=\sum T_k \tag{14}$$

と表わせる。T_kとT_{kj}との差y_{kj}は必らず非負となり，これはj工程でk番目の製造連が終了したときの遊休時間に他ならない。

$$T_k=T_{kj}+y_{kj}\quad j=1,2,\cdots\cdots,M \tag{15}$$

(14)式より

$$\begin{aligned}C&=\sum_k T_k\\&=\sum_k(T_{kj}+y_{kj})\\&=\sum_k(S_{kj}+X_k/q_{kj}+y_{kj})\quad j=1,\cdots,M\end{aligned} \tag{16}$$

となる。（図6参照）

〔工程間待ち時間〕

W_{kj}をk番目の製造連が第 j 在庫点で加工待ちの状態にある時間とすれば,

$$W_{kj}=\max(T_{k,j+1}-T_{k,j},\ 0) \tag{17}$$

と表わせるが，記号maxがあるために(17)式は，非解析的であるので，次のように工夫をする。

$$\text{if}\quad T_{k,j+1}>T_{k,j}\longrightarrow\begin{cases}w_{kj}=T_{k,j+1}-T_{kj}\\y_{kj+1}=0\end{cases} \tag{18}$$

$$\text{if}\quad T_{k,j+1}<T_{k,j}\longrightarrow\begin{cases}w_{kj}=0\\y_{kj+1}=T_{kj}-T_{k,j+1}\end{cases} \tag{19}$$

という関係があるので,

$$w_{kj}-y_{kj+1}=T_{k,j+1}-T_{k,j} \tag{20}$$

$$w_{kj}\cdot y_{kj+1}=0\qquad j=1,\cdots\cdots,M-1 \tag{21}$$

$$w_{kj}\geqq 0,\ y_{kj}\geqq 0 \tag{22}$$

と表わす。(20)式　と(22)式より，W_{kj}とY_{kj+1}は同時に正にはなり得ず，(20)式から，W_{kj}が正（工程間仕掛待ちの状態）のときは，$Y_{kj+1}=0$（遊休状態でない）となり，(18)式は満足され，Y_{kj+1}が正（遊休状態）のときは(19)式が満足される。（図6参照）

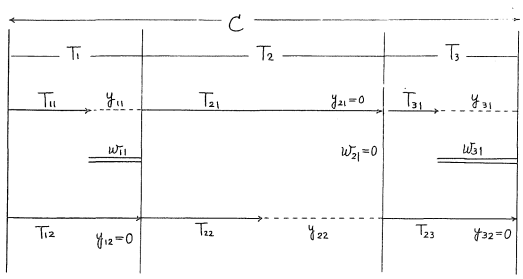

図6　w_{kj} と y_{kj} の関係

3.3　モデルの定式化

3.3.1　制約条件

○最終工程のcycle time C_Mは,

$$C_M=\Sigma^k(S_{kM}+X_k/q_{kM}+y_{kM}) \tag{23}$$

で求められ，需要量＝生産量の条件より,

$$X_k=r_kC_M \tag{24}$$

○各工程間での制約

各工程のcycle timeが等しい条件(10)式は(25)式が成立していればよい。

$$C=\Sigma^k(S_{kj}+X_k/q_{kj}+y_{kj})\quad j=1,\cdots,M \tag{25}$$

更に，(20), (21), (22)式が制約式として,

lot size X_k に課される。

$$\begin{aligned}w_{kj}-y_{kj}&=T_{k,j+1}-T_{k,j}\\&=S_{k,j+1}+X_k/q_{k,j+1}-S_{kj}-X_k/q_{kj}\\&\qquad j=1,2\cdots,M-1\end{aligned} \tag{26}$$

$$w_{kj}\cdot y_{kj+1}=0 \tag{21}$$

$$w_{kj}\geqq 0,\ y_{kj}\geqq 0 \tag{22}$$

(24)式より，$C=X_k/\gamma_k$を代入すれば，すべての制約条件式がX_kの関数として表わすことができる。

3.3.2　目的関数

○最終製品の在庫費用

各品目の単位時間当りの在庫量は

$$X_k(q_{kM}-r_k)/2q_{kM} \tag{27}$$

となる。品目 k の1個当り単位時間当りの在庫費用を k とすれば，最終製品の在庫費用CHMは，(28) 式で与えられる。

$$CHM=\sum_k ThX_k(q_{kM}-r_k)/2q_{kM} \tag{28}$$

○工程間の仕掛在庫費用

第 j 在庫点における品目 k の単位時間当り平均仕掛在庫量I_{kj}は,

$$(X^2{}_k/2q_{kj}+X_kw_{kj})/C \tag{29}$$

となる。$C=X_k/\gamma_k$を代入して消去すると,

$$I_{kj}=r_kX_k/2q_{kj}+r_kw_{kj} \tag{30}$$

として求められる。従って単位時間当り，1個につき仕掛在庫費用を i とすれば，計画期間T内の総仕掛在庫費用CHは(31)式で与えられる。

$$CH = \Sigma^j \Sigma^k T i r_k (X_k / 2q_{kj} + W_{kj}) \quad (31)$$

○総段取替費用

rotation cycle policyだから，各工程の段取替数はすべて等しく，$\sum T\gamma_k/X_k$であるから，総段取替数は

$$M\sum T\gamma_k/X_k \quad (32)$$

で与えられる。1回当りの段取替費用をC_sとすれば，総段取替費用CSTは

$$CST = MTC_s\sum\gamma_k/X_k \quad (33)$$

となる。

我々は目的関数として，総費用Ctotalを，CHM, CH, CSTの和として選ぶ。

$$C_{total} = Th\Sigma^k X_k(q_{kM}-r_k) / 2q_{kM} + Ti \sum_j \sum_k r_k(X_k / 2q_{kj}+w_{kj}) + MTC_s \sum_k r_k / X_k \quad (34)$$

(34)式の目的関数を，(21)式から(26)式までの制約条件のもとで最小にせしめるlot size X_kを求める問題に定式化された。

4. 解　析

前節で定式化した数理計画モデルは，変数X_k, Y_{kj}, W_{kj}の線形制約式と，(22)式の相補条件式から成り，目的関数は品目kについての変数分離形をした凸関数（X_kが分母にあるから）の和になっているため，種々の凸型数理計画法〔6〕によって解くことができる。

又，実際の職場では，工程数，品目数も多く変数の数が相当多くなるが，品目毎に分解計算法を適用することも考えられる。分解アルゴリズムなどの計算上の工夫については別の機会に譲り，ここでは，最も単純なケースとして，2工程2品目の数値例をあげて解析し，ロット生産方式の特性に関するいくつかの重要な知見について述べる。

4.1　数 値 例

付表1に各品目の条件を示す。

表　1

品　目	要求速度	段取替時間		生産速度	
		第1工程	第2工程	第1工程	第2工程
i=1	$\gamma_1=0.1$	$S_{11}=50$	$S_{12}=30$	$p_{11}=0.5$	$p_{12}=1.0$
i=2	$\gamma_2=0.2$	$S_{21}=20$	$S_{22}=40$	$p_{21}=2.0$	$p_{22}=0.5$

計画期間の長さT＝10,000とし，段取替，在庫，仕掛在庫の費用をそれぞれ，

$$C_s = 200,\ h=0.05,\ i=0,005$$

とする。lot sizeをX_1, X_2とすると，(13)式は，

$$T_1 = \max(T_{11}, T_{12}) = \max(2X_1+50,\ 2X_2+40) \quad (35)$$

$$T_2 = \max(T_{21}, T_{22}) = \max(0.5X_2+20,\ X_1+30) \quad (36)$$

となり，(24)式より$X_2=2X_1$を代入すると，

$$T_1 = \max(2X_1+50,\ 4X_1+40) \quad (37)$$

$$T_2 = \max(X_1+20,\ X_1+30) \quad (38)$$

と変形される。仮に$X_1 \geqq 5$のときは，

$$T_1 = 4X_1+40,\ T_2 = X_1+30 \quad (39)$$

となり，このときY_{kj}はT_kとT_{kj}の差だから自動的に，

$$Y_{12}=0,\quad Y_{22}=0 \quad (40)$$

となる。(40)式および$X_2=2X_1$を(25)式に代入して，各工程のcycle timeを求める。

$$C_1 = 3X_1+Y_{11}+Y_{21}+70 \quad (41)$$

$$C_2 = 5X_1+70 \quad (42)$$

$C_1=C_2$（各工程のcycle timeは等しい条件(25)式）より，

$$Y_{11}+Y_{21}=2X_1 \quad (43)$$

又，W_{11}, W_{21}は(26)式より，

$$W_{11}=T_{12}-T_{11}=2X_1-10 \quad (44)$$

$$W_{21}=T_{22}-T_{21}=10 \quad (45)$$

となり，$X_1 \geqq 5$では共に正となり，(40)式より条件(21), (22)は自動的に成立する。

$X_1 \geqq 5$の条件のもとで，すべての制約条件式は満足されており，遊休時間と工程間待ち時間はlot size X_1の関数として(43)式から(45)式で表わされている。

目的関数に，$X_2=2X_1$および(44), (45)式のW_{11}, W_{21}を代入し，所与のT, C_s, h, i等を代入すると，(34)式のCtotal は(46)式になる。

$$Ctotal=552.5X_1+800,000/X_1+200 \quad (46)$$

(46)式をX_1で微分して最適なlot sizeを求める。

$$dC_{total}/dX_1 = 552.5-800000/X_1^2 = 0$$

$$\therefore\ X_1 \fallingdotseq 38$$

$X_1 \geqq 5$の条件を満足しているので，$X_1=38$, $X_2=76$が最適lot sizeとして得られる。

4.2　基本的な特性

lot sizeがシステムの諸要素に及ぼす影響について，以下のことが明らかとなった。

サイクルタイムはlot sizeの線形関数で，待ち時間はサイクルタイムには直接影響しない。又，遊休時間は，lot sizeに比例して大きくなるが，最終工程に遊休時間

が発生する場合は，それだけ最終製品の平均在庫量が減少するので，遊休時間に対する費用と在庫費用のかねあいを考慮する必要がある。

目的関数について検討すると，段取替時間が含まれておらず，段取替時間の大小には関係なく，生産速度と要求速度の大小によって在庫関連費が変動することがわかる。

段取替費用（1回当りC_s）がn倍になるとlot sizeは$\sqrt{n}$倍になることは，単一工程多品目モデルでも同様である。

又，各工程間仕掛在庫費 i が工程間に差があり，後工程へいく程大きくなる場合は，

$$W_{k1} > W_{k2} > \cdots > W_{k,M-1}$$

となるように，lot sizeを調整すればよい。

5．考　察

本研究において，我々は，ロット生産方式をとる職場での一般的条件を整理し，生産管理システムを設計する上での，制約条件，目的関数を数理計画モデルとして定式化することができた。

モデルの構築にあたっての最大のポイントは，工程間干渉の現象，即ち遊休時間や工程間待ち時間の発生をいかにして，解析的関数で表現するかにある。本研究の場合は，多くの職場で用いられているrotation cycle policyのもとでの最適設計方式について述べたものであるが，各工程間のロットサイズを変える方式，あるいは，工程間でrotationが異なる方式など各種方式が考えられる。

rotation cycle policyのもとでの最適解は必らずしも，これら各種方式での最適解に優るとは限らないが，生産計画を固定する上で又，計算が他の方式に較べて有利である。

参考文献

1）M. E. Salveson;
A Problem in Optimal Machine Loading;
Management Science, Vol. 2, No. 3, pp232-260, April, 1956.

2）M. F. Stankard, S. K. Gupta;
A Note on Bomberger's Approach to Lot Size Scheduling; Management Science, Vol. 15, No. 7, March 1969, pp492-452

3）H. A. Taha, R. W. Skeith;
The Economic Lot Sizes in Multistage Production Systems;
AIIE Transactions, II(2), 1970 pp157-162

4）L. A. Johnson, M. C. Douglas;
Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control;
John Wiley & Sons, New York, 1973, pp154-165

5）W. I. Zangwill;
A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System;
Management Science, Vol. 15, No. 9 1969, pp506-527

6）志水清孝；
システム制御と数理計画；
コロナ社，1972