

幾何学非線形 材料非線形 非線形固有値

1 はじめに

その1に続き、中心圧縮柱の非線形座屈現象における変形状態について考察する。(その1)の梗概で記載した式や図は記号Aを付し、その2ではBを付す。

2 座屈状態における変形関数の条件

変形関数は式(A4)から曲げモーメント分布と同じ楕円関数でなければならないので、式(B1)を得る。

$$x(s) = -\frac{\delta_H(k)}{2} \operatorname{cn}\left(\frac{s}{\lambda(k)} + K(k)\right) \quad (B1)$$

式(B1)の境界条件として(A13)は必須であり、(B2)として再記する。このとき、図A-1に従って部材長、水平変形量、鉛直変位などを積分計算すると図B-1を得る(文献1を参照)。これらは、式(B3), (B4)となる。

$$2K(k)\lambda(k) = l(k) = l_0 \quad (B2)$$

$$\delta_H(k) = 4k\lambda(k) \quad (B3)$$

$$h(k) = 2(2E(k) - K(k))\lambda(k) \quad (B4)$$

ここで、 $K(k)$ ：第一種の完全楕円積分
 $E(k)$ ：第二種の完全楕円積分

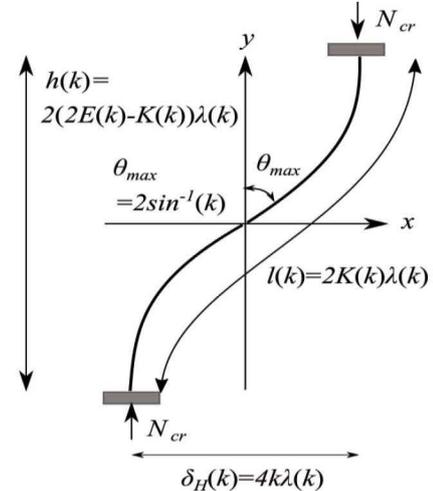
変形関数(B1)は式(A10)の固有方程式の解であり、固有関数でもある。再起すると(B5)となる。式(B1)の両辺を微分し、式(A2)に代入すると式(B6)を得る。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{s}{\lambda} + K(k)\right)\right) x(s) = 0 \quad (B5)$$

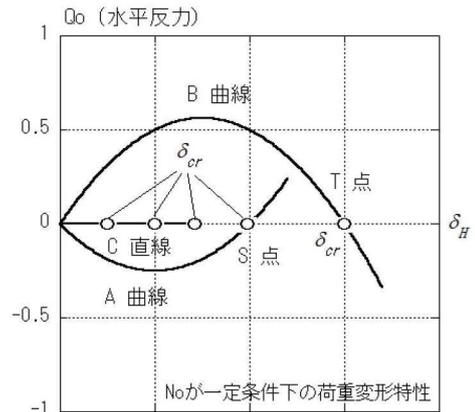
$$\sin\left(\frac{\theta(s,k)}{2}\right) = k \operatorname{sn}\left(\frac{s}{\lambda(k)} + K(k)\right) \quad (B6)$$

中心圧縮柱の中央部分におけるたわみ角の最大値 θ_{max} と楕円関数の母数 k には式(B7)の関係があることが示された。(図B-1参照)

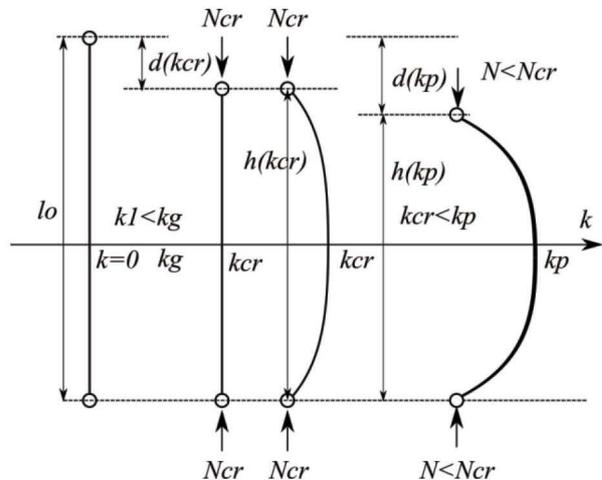
$$\sin\frac{\theta_{max}}{2} = k \quad (B7)$$



図B-1 座屈状態を表す変形関数グループ



図B-2 座屈荷重近傍の安定性



図B-3 分岐座屈が起きるときの座屈荷重

3 座屈荷重近傍の安定性について

我々は水平反力が消失するときの軸力を座屈荷重として定義したが、ここでは、鉛直軸力が座屈荷重の近傍にあるときの安定性について考察する。実は、鉛直荷重が座屈荷重となっても、安定している場合があり、材料が線形の場合はエラスティカとして知られている。従って、鉛直荷重を座屈荷重に保ったまま、水平変位を漸増させたときには水平反力が正值となるか負値となるかは図 B-2 に示すように 3 通りの場合がある。

軸力を徐々に増大させていくと水平変形を生じる点に到達する（オイラー座屈）。更に軸力を増大させると実際に水平変形が生じて釣り合う。これがエラスティカであり、A 曲線の軌跡上を動くので変形が増大しても復元力が発生し点 S で安定している。一方、鋼材の非弾性座屈などでは B 曲線上を動くので、座屈状態である点 T で復元力が負であり不安定である。いわゆる分岐が発生するときは曲線 B の頂点が低く、原点から点 T に飛び移るときのエネルギー準位が低いので、突然柱の変形が大きくなる。また、直線 C 上を動く場合は積層ゴム支承のように特殊な条件を満足する場合であり、水平変形の増大にもかかわらず座屈荷重は一定となることが既往研究により判明している（文献 1）。

では、どのような条件を満足すると分岐が発生するのであろうか？次節では、この問題を扱う。

4 分岐の発生と座屈荷重

鋼材では座屈が始まる直前まで材料は弾性である。幾何学非線形を考慮した材料線形モデルでは、変形が少しでも進むと、必ず反力が発生し元の状態に戻ってしまう（図 B-2 の曲線 B）。そこで、分岐が起きるときの母数を k_{cr} とし、徐々に鉛直変形を増大させていった時の柱の変形状態を図 B-3 に示した。分岐が起きるときの鉛直変位が分かれば、鋼材の座屈荷重を特定できる。

分岐したときの端部モーメントが降伏モーメントよりも小さいときは式 (B8) であり、弾性座屈と定義できる。これが、式 (B9) であれば非弾性座屈である。

$$M_o(k_{cr}) \leq M_y \quad (B8)$$

$$M_y \leq M_o(k_{cr}) \leq M_p \quad (B9)$$

第一種の完全楕円積分と第 2 種の完全楕円積分は式 (B10) と (B11) で近似できるので、分岐が発生した時の鉛直沈み込み量 $d(k_{cr})$ は式 (B12) で近似できる。この際、式 (B3) と (B4) を参照した。従って、分岐が発生する直前の鉛直荷重は弾性状態であるから式 (B13) で与えられる。

分岐が起きれば座屈状態に移行するので、式 (A4) を満足するから式 (B14) が成り立つ。座屈とは分岐である。従って、式 (B13), (B14) から分岐の起きる母数、式 (15) を決定することができる。弾性座屈の限界母数は式 (B16) で与えられ、その鉛直荷重は式 (B17) となる。

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64} k^4 \dots \right) \doteq \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \quad (B10)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 \dots \right) \doteq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) \quad (B11)$$

$$d(k_{cr}) = l(k_{cr}) - h(k_{cr}) \approx \pi \lambda(k_{cr}) k_{cr}^2 \approx l_o k_{cr}^2 \quad (B12)$$

$$N_{cr}(k_{cr}) = \frac{AE_c}{l_o} d(k_{cr}) \approx AE_c k_{cr}^2 \quad (B13)$$

$$M_o(k_{cr}) = N_{cr}(k_{cr}) \delta_H(k_{cr}) = 2k_{cr} \lambda(k_{cr}) N_{cr}(k_{cr}) \quad (B14)$$

$$k_{cr} = \left(\frac{\pi M_o(k_{cr})}{2AE_c l_o} \right)^{1/3} \quad (B15)$$

$$k_g = \left(\frac{\pi M_y}{2AE_c l_o} \right)^{1/3} \quad (B16)$$

$$N_g = AE_c k_g^2 = \left(\frac{N_E N_Y^2 Z^2}{4AI} \right)^{1/3} \quad (B17)$$

ここで、 N_E : オイラー座屈荷重 ($= \pi^2 EI / l_o^2$)

N_Y : 降伏荷重 ($= A \sigma_y$)

Z : 断面係数 ($= M_y / \sigma_y$)

E_c : 弾性ヤング率

5 分岐が発生する条件

前節では分岐の発生する母数を求めた。分岐の発生こそが座屈の発生である。分岐が発生すると座屈状態に移行する。座屈状態の安定性が図 B-2 に示した A 曲線、B 曲線、C 直線のいずれかに分類され、不安定な座屈状態となるか安定した座屈状態となるかが決まる。不安定な座屈状態に移行すると変形は急激に増大し柱は崩壊する。安定な座屈状態に移行すると座屈発生後も、若干、鉛直荷重が増大し、変形の増大とともに座屈荷重は減少に転じる。式 (B15) を解き、分岐する母数を特定するためには、端部曲げモーメントの範囲を特定する必要がある。

参考文献

- (1) 西村功, “幾何学的非線形を考慮した曲げ-せん断部材の座屈後挙動,” 日本建築学会構造系論文集, 65-72, 第 593 号, 2005 年 7 月

* 東京都市大学 工学部 建築学科 教授
 ** 愛知工業大学 工学部 建築学科 講師
 *** 東京都市大学大学院 工学研究科 建築学専攻修士

* Prof., Dept. of Architecture, Tokyo City University
 ** Lect., Dept. of Architecture, Aichi Institute of Technology
 *** Grad. Stud., Dept. of Architecture, Tokyo City University