愛知工業大学研究報告
第 36 号 A　平成 13 年

ランダムデータに基づく数値積分とその最良形について

Numerical Integration Based on the Values at Random Points and its Best Formula

有賀　尚人[†]　　樋口　功[‡]
Naoto ARUGA　　Isao HIGUCHI

Abstract. When we deal with the experimental data, it occurs often that we must calculate the definite integral using the function-values at random finite points under the condition that not only the primitive function but also the integrand itself is unknown.

The main aim of this study is to obtain the concrete form of numerical integration based on the function values at random points on the interval.

And we shall determine the most accurate integration formula based on the values at no equally spaced two or three abscissas.

１．はじめに

物理や工学の実験では、原始関数どころか非積分関数さえも分からない状況で、ランダムデータをよりどころに積分値を計算せざるを得ない場合がしばしば生じる。

昔から知られている区分求積法，台形公式および Simpson の公式においては，端点や等分割区分点における関数値を基に積分の近似計算が行われている。

筆者等は情報通信工学科・卒業研究において，実験データのような，等間隔ではなくランダムな分布点においてプロットされた関数値だけを頼りに，形の不明な関数の可能な限り精度の高い近似積分公式の具体的な形を決める作業を行なってきた。

任意の２点および３点における関数値が与えられたとき，データに適当な重みを付加することで，可能な限り精度の高い近似積分公式を導き出せることが分かった。

更に，得られた近似積分公式に関して，その精度が最も高くなるような２点および３点の具体的な値を決定することが出来た。

まず，得られた結果の概略を述べる。

---

† 情報通信工学科・４年生
‡ 基礎教育センター・自然科学教室

区間$[a,b]$上の任意のｎ個の点$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$における関数値に基づくGauss型近似積分公式は次式で定義される。

$$\widetilde{I}_n(f) = \widetilde{I}_n\,(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\,; \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})\,(f) = h\{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \cdots + \omega_{n-1} f(x_{n-1})\}$$

ここで，$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ は重みを表す非負の定数である。

まず**定理１**において，曲線$y = f(x)$を２点$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$を通る直線で近似した近似積分公式$\widetilde{I}(x_0, x_1)(f)$ を求めたところ

$$\widetilde{I}(x_0, x_1)(f) = \frac{(b-a)}{2(x_1 - x_0)}\{(2x_1 - a - b)f(x_0) - (2x_0 - a - b)f(x_1)\}$$

と具体的に表せることが分かった。

積分公式 $\widetilde{I}(x_0, x_1)(f)$ は，区間$[a,b]$の幅を$h = b - a$としたとき

$$\widetilde{I}(x_0, x_1)(f) = h\{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)\} \quad (\omega_0, \omega_1 \text{は定数})$$

の形をしている。

そこで次に，任意の $x_0, x_1 \in [a,b]$ に対し，重みω_0, ω_1を持つ一般の２点近似積分公式

$$\widetilde{I}_2(x_0, x_1; \omega_0, \omega_1)(f) = h\{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)\}$$

を考えた。

任意の $x_0, x_1 \in [a,b]$に対し,ω_0 およびω_1が

$$\omega_0 = \frac{2(x_1 - a) - h}{2(x_1 - x_0)}, \qquad \omega_1 = \frac{-2(x_0 - a) + h}{2(x_1 - x_0)}$$

を満たすとき，$\widetilde{I}_2(x_0, x_1; \omega_0, \omega_1)(f)$の精度が最も高くなることが**定理２**で証明できた。　すなわち，この任意の $x_0, x_1 \in [a,b]$ に対する最良の近似積分公式は,**定理１**で得られた$\widetilde{I}(x_0, x_1)(f)$と一致する。　また誤差が$O(h^3)$となることも示せた。

更に、$\widetilde{I}(x_0, x_1)(f)$の精度を最高にする x_0, x_1 の値を求めたところ

$$x_0 = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, \quad x_1 = a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, \quad h = b - a$$

となることが**定理３**で分かった。　また上の x_0, x_1 の値に対する最良の近似積分公式の誤差は，同じ２点近似公式である古典的台形公式より２ランク高く，３点近似積分公式であるSimpsonの公式と同じ$O(h^5)$となることも証明できた。

最後に任意の 3 点 $x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ に対し，重み $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ を持つ、一般の３点近似積分公式

$$\widetilde{I}_3(x_0, x_1, x_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2)(f) = h\{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)\}$$

を考えた。

任意の $x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ に対し，$\omega_0, \omega_1, \omega_2$ が

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{6(x_1 - a)(x_2 - a) - 3(x_1 - a)h - 3(x_2 - a)h + 2h^2}{6(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \\ \omega_1 = \dfrac{6(x_2 - a)(x_0 - a) - 3(x_2 - a)h - 3(x_0 - a)h + 2h^2}{6(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)} \\ \omega_2 = \dfrac{6(x_0 - a)(x_1 - a) - 3(x_0 - a)h - 3(x_1 - a)h + 2h^2}{6(x_1 - x_2)(x_0 - x_2)} \end{cases}$$

を満たすとき，$\widetilde{I}_3(x_0, x_1, x_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2)(f)$ の精度が最も高くなり，その誤差が $O(h^4)$ となることが**定理６**で証明できた。 また，この３点近似積分公式は，３点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ を通る２次曲線で $y = f(x)$ を近似し，$[a,b]$ 上で積分して作られる３点近似積分公式と一致する(**定理５**)。

更に，

$$x_0 = a - \frac{\sqrt{5}}{10}h \quad , \qquad x_1 = a + \frac{1}{2}h \quad , \qquad x_2 = a + \frac{\sqrt{5}}{10}h$$

のとき，上の 3 点近似積分公式の精度が最も高くなり，誤差が $O(h^7)$ となることも，**定理７**で示せた。

以上をまとめて報告する。

２．ランダムデータに基づく 2 点近似積分公式

$f(x)$ を $[a,b]$ 上で連続な関数とする。 任意の $x_0, x_1 \in [a,b]$ に対し，２点 $(x_0, f(x_0))$、$(x_1, f(x_1))$ を通る直線の方程式を $y = p(x)$ とする。ラグランジュの補間公式によると $p(x)$ は次の形となる。

$$p(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$f(x)$ を $p(x)$ で近似して $[a,b]$ 上で積分して出来る近似積分公式を $\widetilde{I}(f) = \widetilde{I}(x_0, x_1)(f)$ と書く。

すなわち

$$\widetilde{I}(f) = \widetilde{I}(x_0, x_1)(f) = \int_a^b p(x)dx$$

おくと，$\widetilde{I}(f)$ は次の定理が示すように，x_0, x_1 を用いて具体的に表される。

定理１． $\widetilde{I}(f)=\widetilde{I}(x_o,x_1)(f)=\dfrac{b-a}{2(x_1-x_0)}\{(2x_1-a-b)f(x_0)-(2x_0-a-b)f(x_1)\}$

証明．

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}(f) &= \int_a^b P(x)dx \\
&= \int_a^b \left\{ f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right\} dx \\
&= \int_a^b \left\{ f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} - f(x_1)\frac{x-x_0}{x_0-x_1} \right\} dx \\
&= \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}\int_a^b (x-x_1)dx + \frac{f(x_1)}{x_0-x_1}\int_a^b (x-x_0)dx \\
&= \frac{b-a}{2(x_1-x_0)}\{(2x_1-a-b)f(x_0)-(2x_0-a-b)f(x_1)\} \ .
\end{aligned}$$

注意． $\widetilde{I}(f)=\widetilde{I}(x_0,x_1)(f)$ は $h=b-a$ とおくと，**定理１**より定数 ω_0,ω_1 を用いて

$$\widetilde{I}(f)=\widetilde{I}(x_0,x_1)(f)=h\{\omega_0 f(x_0)+\omega_1 f(x_1)\}$$

の形に表すことが出来る。

任意の $x_0,x_1 . [a,b]$ および任意の非負の定数 ω_0,ω_1 から作られる一般の２点近似積分公式 $\widetilde{I}_2(f)=\widetilde{I}_2(x_0,x_1;\omega_0,\omega_1)(f)=h\{\omega_0 f(x_0)+\omega_1 f(x_1)\}$ に関し，次の定理が得られる。

定理 ２． *任意の $x_0,x_1 . [a,b]$ に対し，$\widetilde{I}_2(x_0,x_1;\omega_0,\omega_1)(f)$ の精度は，ω_0 と ω_1 が次の式を満たすとき最高となる。*

$$\begin{cases}
\omega_0 = \dfrac{2(x_1-a)-h}{2(x_1-x_0)} \\[2ex]
\omega_1 = \dfrac{-2(x_0-a)+h}{2(x_1-x_0)}
\end{cases}$$

すなわち全ての２点近似積分公式 $\widetilde{I}_2(f)$ の中で最良のものは定理１で得られた $\widetilde{I}(x_0,x_1)(f)$ と一致する。

また真の積分値 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ と $\widetilde{I}(x_0,x_1)(f)$ との誤差は，$O(h^3)$ となる。

証明． Taylor の定理より

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}(f) &= h\{\omega_0 f(x_0)+\omega_1 f(x_1)\} \\
&= h\omega_0\left\{f(a)+f'(a)(x_0-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x_0-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x_0-a)^3+\cdots\right\} \\
&\quad +h\omega_1\left\{f(a)+f'(a)(x_1-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x_1-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x_1-a)^3+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^{a+h} f(x)dx \\
&= [F(x)]_a^{a+h} \\
&= F(a+h)-F(a) \\
&= F'(a)h+\frac{F''(a)}{2!}h^2+\frac{F'''(a)}{3!}h^3+\cdots \\
&= f(a)h+\frac{f'(a)}{2!}h^2+\frac{f''(a)}{3!}h^3+\cdots
\end{aligned}
$$

よって誤差は

$$
\begin{aligned}
&\tilde{I}(f)-I(f) \\
&=h\left[f(a)(\omega_0+\omega_1-1)+f'(a)\left\{\omega_0(x_0-a)+\omega_1(x_1-a)-\frac{h}{2!}\right\}+f''(a)\left\{\omega_0\frac{(x_0-a)^2}{2!}+\omega_1\frac{(x_1-a)^2}{2!}-\frac{h^2}{3!}\right\}+\cdots\right]
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

誤差を少なくするため 2 つの定数 ω_0,ω_1 を定める。 そのためには，式 (2.1) より

$$
\begin{cases}
\omega_0+\omega_1-1=0 \\
(x_0-a)\omega_0+(x_1-a)\omega_1-\dfrac{h}{2!}=0
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

を満たすように ω_0,ω_1 を定めればよい。

式 (2.2) より w_1 を消去すると，$(x_1-x_0)\omega_0=\frac{1}{2}\{2(x_1-a)-h\}$ で $\omega_0=\frac{2x_1-(a+b)}{2(x_1-x_0)}$，同様に

$$\omega_1=\frac{-2x_0+a+b}{2(x_1-x_0)}$$

これらの ω_0,ω_1 は**定理 1** で求めた $f(x_0),f(x_1)$ の係数と一致する。
従って、第一項と第二項が消去されるので，式 (2.1) より誤差は

$$\left|\tilde{I}(f)-I(f)\right|=\left|h\left[f''(a)\left\{\omega_0\frac{(x_0-a)^2}{2!}+\omega_1\frac{(x_1-a)^2}{2!}-\frac{h^2}{3!}\right\}+\cdots\right]\right|\leq h\left|f''(a)\right|\left(\left|\omega_0\right|\frac{h^2}{2!}+\left|\omega_1\right|\frac{h^2}{2!}+\frac{h^2}{3!}\right)=O(h^3$$

3. 最良の2点近似積分公式

定理3. *任意の* $x_0, x_1 . [a,b]$ *に対し,* ***定理1*** *で得られた最良の近似積分公式* $\tilde{I}(x_0, x_1)(f)$ *は* x_0, x_1 *が*

$$\begin{cases} x_0 = a + \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}h = a + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)h \\ x_1 = a + \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}h = a + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)h \end{cases}$$

のとき，その精度が最も高くなる。　すなわち $[a, a+h]$ *上のすべての2点近似積分公式中で最良のものは*

$$\tilde{I}\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right)(f)$$

で，その誤差は3点近似積分公式である Simpson の公式と同じ $O(h^5)$ *である。*

証明. 誤差を計算すると

$\tilde{I}(f) - I(f)$

$$= [\ [f(a)(w_0 + w_1 - 1) + f'(a)\left\{w_0(x_0 - a) + w_1(x_1 - a) - \frac{h}{2!}\right\} + f''(a)\{w_0$$

$$= \left[f(a)(\omega_0 + \omega_1 - 1) + f'(a)\left\{\omega_0(x_0 - a) + \omega_1(x_1 - a) - \frac{h}{2!}\right\} + f''(a)\left\{\omega_0 \frac{(x_0 - a)^2}{2!} + \omega_1 \frac{(x_1 - a)^2}{2!} - \frac{h^2}{3!}\right\} + \right.$$

$$\left. + f'''(a)\left\{\omega_0 \frac{(x_0 - a)^3}{3!} + \omega_1 \frac{(x_1 - a)^3}{3!} - \frac{h^3}{4!}\right\} + \cdots \right]$$

この式で，第一項、第二項を0にする ω_0, ω_1 は，**定理2** ですでに定めてある。

さらに第三項と第四項を消去するため連立方程式をたてると

$$\begin{cases} f''(a)\left\{\omega_0 \dfrac{(x_0 - a)^2}{2!} + \omega_1 \dfrac{(x_1 - a)^2}{2!} - \dfrac{h^2}{3!}\right\} = 0 & \text{———————} \quad (3.1) \\ f'''(a)\left\{\omega_0 \dfrac{(x_0 - a)^3}{3!} + \omega_1 \dfrac{(x_1 - a)^3}{3!} - \dfrac{h^3}{4!}\right\} = 0 & \text{———————} \quad (3.2) \end{cases}$$

(3.1) の両辺に３！を, (3.2) の両辺に４！をそれぞれ掛けると

$$\begin{cases} 3\omega_0(x_0-a)^2+3\omega_1(x_1-a)^2-h^2=0 & \text{——————} (3.3) \\ 4\omega_0(x_0-a)^3+4\omega_1(x_1-a)^3-h^3=0 & \text{——————} (3.4) \end{cases}$$

$(3.3)\times 4(x_1-a)-(3.4)\times 3$ より

$$12\omega_0(x_0-a)^2\{(x_1-a)-(x_0-a)\}-h^2\{4(x_1-a)-3h\}=0$$

ここで $\begin{cases} x_0-a=X_0h & (0\le X_0\le 1) \\ x_1-a=X_1h & (0\le X_1\le 1) \quad (X_0\le X_1) \end{cases}$ とおくと

$$12\omega_0{X_0}^2h^2(X_1h-X_0h)-h^2(4X_1h-3h)=0$$

両辺を h^2 で割ると

$$12\omega_0{X_0}^2(X_1-X_0)-4X_1+3=0 \qquad \text{——————} (3.5)$$

$(3.3)\times 4(x_0-a)-(3.4)\times 3$ より

$$12\omega_1(x_1-a)^2\{(x_0-a)-(x_1-a)\}-h^2\{4(x_0-a)-3h\}=0$$

すなわち $$12\omega_1{X_1}^2h^2(X_0h-X_1h)-h^2(4X_0h-3h)=0$$

両辺を h^2 で割ると

$$12\omega_1{X_1}^2(X_0-X_1)-4X_0+3=0 \qquad \text{——————} (3.6)$$

定理２より ω_0 は次の式で与えられる。

$$\omega_0=\frac{2x_1-(a+b)}{2(x_1-x_0)}=\frac{2x_1-2a-h}{2(x_1-x_0)}=\frac{2X_1h-h}{2(X_1-X_0)h}=\frac{2X_1-1}{2(X_1-X_0)}$$

同様な計算で

$$w_1=\frac{-2X_0+1}{2(X_1-X_0)}$$

(3.5) に ω_0 を代入すると

$$12{X_0}^2X_1-6{X_0}^2-4X_1+3=0 \qquad \text{——————} (3.7)$$

(3.6) に ω_1 を代入すると

$$12X_0{X_1}^2+6{X_1}^2-4X_0+3=0 \qquad \text{——————} (3.8)$$

ここで $X_0 < X_1$ に注意して連立方程式 (3.7),(3.8) を解くと

$$X_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \quad X_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

従って，

$$x_0 - a = X_0 h = \frac{3-\sqrt{3}}{6} h \therefore {}_0 = a + \frac{3-\sqrt{3}}{6} h \quad ,$$

$$x_1 - a = X_1 h = \frac{3+\sqrt{3}}{6} h \therefore x_1 = a + \frac{3+\sqrt{3}}{6} h \quad 。$$

定理４. *最良の２点近似積分公式 $\widetilde{I}_2(f)$ の具体的な形は次のようになる。*

$$\widetilde{I}_2(f) = \frac{1}{2} h \left\{ f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) + f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) \right\} (f)$$

証明. $\widetilde{I}_2(f) = h\{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)\}$ に**定理２**、**定理３**で定めた

$$\omega_0 = \frac{2(x_1 - a) - h}{2(x_1 - x_0)}, \quad \omega_1 = \frac{-2(x_0 - a) + h}{2(x_1 - x_0)}$$

$$x_0 = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h, \quad x_1 = a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h$$

を代入して計算すると

$$= h \left[\frac{2\left\{ a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h - a \right\} - h}{2\left\{ a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h - a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right\}} \times f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) + \frac{-2\left\{ a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h - a \right\} + h}{2\left\{ a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h - a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right\}} \times f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) \right]$$

$$= h \left\{ \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) h - h}{\frac{2}{3}\sqrt{3}h} \times f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) + \frac{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) h + h}{\frac{2}{3}\sqrt{3h}} \times f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} h \left\{ f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) + f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h \right) \right\}$$

となり，定理が証明された。

4．ランダムデータに基づく３点近似積分公式

定理５． x_0, x_1, x_2 を $[a,b]$ 上の異なる３点とする。 曲線 $y=f(x)$ 上の３点

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

を通る２次曲線で $f(x)$ を近似し，$[a,b]$ 上で積分して作られる近似積分公式 $\tilde{I}(x_0, x_1, x_2)(f)$ は次の形に表される。 ただし，$h=b-a$ である。

$$\tilde{I}(x_0, x_1, x_2)(f) = \frac{h}{6(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_0)}$$
$$\times\left[(x_2-x_1)\left\{6(x_1-a)(x_2-a)-3(x_1-a)h-3(x_2-a)h+2h^2\right\}f(x_0)\right.$$
$$+(x_0-x_2)\left\{6(x_2-a)(x_0-a)-3(x_2-a)h-3(x_0-a)h+2h^2\right\}f(x_1)$$
$$\left.+(x_1-x_0)\left\{6(x_0-a)(x_1-a)-3(x_0-a)h-3(x_1-a)h+2h^2\right\}f(x_2)\right] \qquad (4.1)$$

証明. ３点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ を通る２次曲線は２次のラグランジュの補間公式より

$$y=P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

ゆえに $\tilde{I}(x_0, x_1, x_2)(f)=\int_a^b P_2(x)dx$ を計算すると定理の具体的な形 (5.1) 式が導かれる。

計算には次の式

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)dx = \frac{(b-a)^3}{6}\left\{\frac{6(x_0-a)(x_1-a)}{h^2}-\frac{3(x_0-a)}{h}-\frac{3(x_1-a)}{h}+2\right\}$$
$$=\frac{h}{6}\left\{6(x_0-a)(x_1-a)-3(x_0-a)h-3(x_1-a)h+2h^2\right\}$$

を３回使えばよい。

定理５で得られた $\tilde{I}(x_0, x_1, x_2)(f)$ は,

$$\tilde{I}(x_0, x_1, x_2)(f)=h\left\{\omega_0 f(x_0)+\omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2)\right\} \qquad (\omega_0, \omega_1, \omega_i \text{ は非負の定数})$$

の形をしている。

そこで，$a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$ を満たす任意の x_0, x_1, x_2 に対し、重み $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ を持つ,一般の３点近似積分公式を

$$\tilde{I}(x_0, x_1, x_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2)(f) = h\{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)\}$$

とすると、次の定理が得られる。

定理 6. *任意の相異なる３点* $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ *に対し，* ω_0, ω_1 *および* ω_2 *が*

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{6(x_1 - a)(x_2 - a) - 3(x_1 - a)h - 3(x_2 - a)h + 2h^2}{6(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \\ \omega_1 = \dfrac{6(x_2 - a)(x_0 - a) - 3(x_2 - a)h - 3(x_0 - a)h + 2h^2}{6(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)} \\ \omega_2 = \dfrac{6(x_0 - a)(x_1 - a) - 3(x_0 - a)h - 3(x_1 - a)h + 2h^2}{6(x_1 - x_2)(x_0 - x_2)} \end{cases} \qquad \text{———— (4.2)}$$

を満たすとき， $\tilde{I}(x_0, x_1, x_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2)(f)$ *の精は最も高くなる。*

さらに $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ *が (4.2) を満たすとき，* $\tilde{I}(x_0, x_1, x_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2)(f)$ *は**定理 5**で得られた*

$\tilde{I}(x_0, x_1, x_2)(f)$ *と一致する。　また誤差は* $O(h^4)$ *になる。*

証明. Taylor の定理より

$$\begin{aligned} \tilde{I}(x_0, x_1, x_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2)(f) &= h\{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)\} \\ &= h\left[\omega_0\left\{f(a) + f'(a)(x_0 - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x_0 - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x_0 - a)^3 + \cdots\right\}\right. \\ &\quad + \omega_1\left\{f(a) + f'(a)(x_1 - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x_1 - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x_1 - a)^3 + \cdots\right\} \\ &\quad \left. + \omega_2\left\{f(a) + f'(a)(x_2 - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x_2 - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x_2 - a)^3 + \cdots\right\}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx \\ &= f(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \frac{1}{3!}f''(a)h^3 + \frac{1}{4!}f'''(a)h^4 + \cdots \end{aligned}$$

と比較し，誤差 $\tilde{I}(x_0, x_1, x_2; \omega_0, \omega_1, \omega_2)(f) - I(f)$ を最小にするため３つの定数 $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ を定める。

そのためには、

$$\begin{cases} \omega_0+\omega_1+\omega_2=1 & \text{———} \quad (4.3) \\ (x_0-a)\omega_0+(x_1-a)\omega_1+(x_2-a)\omega_2=\dfrac{h}{2!} & \text{———} \quad (4.4) \\ \dfrac{1}{2!}\left\{(x_0-a)^2\omega_0+(x_1-a)^2\omega_1+(x_2-a)^2\omega_2\right\}=\dfrac{h^2}{3!} & \text{—} \end{cases}$$

を満たすように $\omega_0,\omega_1,\omega_2$ を定めればよい。　これらを連立させて解くと

$$\omega_0=\frac{6(x_1-a)(x_2-a)-3(x_1-a)h-3(x_2-a)h+2h^2}{6(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$$

$$\omega_1=\frac{6(x_2-a)(x_0-a)-3(x_2-a)h-3(x_0-a)h+2h^2}{6(x_0-x_1)(x_2-x_1)}$$

$$\omega_2=\frac{6(x_0-a)(x_1-a)-3(x_0-a)h-3(x_1-a)h+2h^2}{6(x_1-x_2)(x_0-x_2)}$$

５．最良の３点近似積分公式

最後に，定理５，定理６ で得られた $\tilde{I}(x_0,x_1,x_2)(f)$ の精度を最高にする x_0,x_1,x_2 の値を決める。

定理７． *任意の* $x_0,x_1,x_2 .[a,b]$ *に対し,* ***定理５，６*** *で得られた最良の近似積分公式* $\tilde{I}(x_0,x_1,x_2)(f)$ は x_0,x_1,x_2 *が*

$$\begin{cases} x_0=a+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)h \\ x_1=a+\dfrac{1}{2}h \\ x_1=a+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)h \end{cases}$$

のとき，その精度が最も高くなる。

証明。　**定理３** の証明と同じ方法で Taylor のを使い新の積分の展開係数と比較することで示される。

参考文献.

[1] 稲沢久也，樋口功，被積分関数の滑らかさによる数値積分公式の誤差の評価について愛知工業大学研究報告，３３号Ａ，1998.

[2] 篠崎壽夫，松下裕輔，応用数学計算法入門（上），（下），コロナ社，1971.

[3] 清水麻希子，富永真琴，樋口功，誤差の評価から逆算した閉型積分近似公式について，愛知工業大学研究報告，３４号Ａ，1999.

[4] 杉浦洋，入門数値計算，サイエンス社，1997.

[5] 高田勝，機会計算法，養賢堂，1994.

[6] 秦野和郎，複合積分則の剰余項について，数値解析とそのアルゴリズム予稿集，於京都大学数理解析研究所，1991.

[7] 山本哲郎，数値解析入門，サイエンス社，1995.

[8] F.B.Hildebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1997.

[9] i.Higuchi, Recursion formulas of numerical integrations based on the values at random abscissas, Proceedings of Symposium on Potential Theory, 2000, 52-59.

[10] R.Kress, Numerical analysis, Springer-Verlag, 1998.

[11] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[12] J.Stoer and R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

（受理　平成13年３月19日）