愛知工業大学研究報告
第３２号Ａ　平成９年

ウェーブレットによる成長学へのアプローチ

― ウェーブレット提唱までの数学的関数の歴史的経緯とその理論的背景に関する論議 ―

An Approach to Auxology by Wavelet

- discussion in the historical detail and the theoretical background of mathematical function before proposing Wavelet -

藤　井　勝　紀
Katsunori　Fujii

ABSTRACT　Growth is phenomena which individual changes with time as human, and the origin as the scholarship can be originated in embryology. Recently, about significance in Auxology, " Auxology is grasped as phenomena which the individual changes with time from birth to adult, is to elucidate the phenomena, and is scientific scheme to investigate the universal principle. " Therefore, studies which fit the mathematical function to the growth process are popularly known historically as the methodology to derive the universal principle in Auxology. This paper is to investigate the historical significance and the theoretical background of fitting the mathematical function to the growth phenomena to derive the universal principle in Auxology. And the Wavelet is proposed in process which more effective mathematical functions are groped after discussing historically about fitting the mathematical function to the growth phenomena.

緒　言

成長とは、端的に云えば人間としての個体が時を経るごとにその変化を示す現象であり、その学問としての起源は発生学にその端を求めることができる。近年における成長学（Ａｕｘｏｌｏｇｙ）の意義は、『生体が生まれてから成人に達するまでの時間的変異を一連の現象として捉え、その現象を把握、解明し、そこから一般的な法則性を究明しようとする学問大系であると考えられる。』ちなみに、成人を経て、死に至るまでの時間的変異を扱った学問として、最近、注目されてきたのが老化学といえよう。したがって、成長学へのアプローチとして、自然科学系の立場を取るならば、次の２つ方法が考えられる。その１つは成長現象の様相がどのようなものなのか明確にすることであり、もう１つは明確にされた現象から一般的な法則性を見つけ出そうとするものである。もちろんこの両者のアプローチの仕方はお互いに影響を与えながら、その両者によって導かれた現象解明の普遍的法則性を追究することが自然科学における成長学たる所以といえるのではないだろうか。しかしながら、今日までの成長学における一般的法則性の成就は達成されていないと考えられる。もちろんその模索は試みられてきたが、研究の主流は専ら成長現象の実態解明に費やされてきた。この点に関して、成長学は生物学、医学と共通な性格を持つが、生物学、医学が明確な科学的基盤を備えているのに対し、成長学は歴史的に浅い影響のためか、科学的な要素が希薄である。その大きな要因は研究の手法にあると考えられる。成長学は、元は医学者である Tanner が **『Ａｕｘｏｌｏｇｙ』** として提唱した学問体系であり、生物学、医学から派生した学問分野であることは周知のことであろう。したがって、研究の手法大系は生物学、医学における手法理論を適用してきた経緯はある。しかし、成長学の大きな特徴は人の時間的変異を扱うことであり、そのため時間の変化をどのように扱うかが研究の手法理論に反映されることになる。古典的な成長研究で

有名な Scammon[1] は成長現象の実態解明の手法として、多くの横断的集団データを扱う方法と個々による追跡、継続する方法があると述べている。これは今日では横断的資料および縦断的資料を扱うことを示唆しているものである。そして、Tanner[2)3)] は自ら縦断的資料に対して graphic method を提唱し、Ａｕｘｏｌｏｇｙに多大な貢献を果たしている。また、アロメトリー方式も考えられているが、しかしながら、成長学の科学的基盤を成就するために普遍的法則性を導くための手法理論は未だに確立されているとはいえない。ただ、その模索として成長曲線に対して数学的関数を当てはめる試みはＡｕｘｏｌｏｇｙの歩みと共に存在してきた。今日、成長学の普遍的法則性へのアプローチを探る鍵として数学的関数の当てはめの議論は、コンピューター社会において重要な意味を持つものと考えられる。そして、このような議論の延長上にウェーブレットとの接点を見るものである。

成長学の歴史的意義

今日、我国における成長研究の動向は、Scammon[1] の云う個人についての追跡、継続的研究（ｓｅｒｉａｔｉｍ ｓｔｕｄｙ）にその焦点が向けられてきたようである。つまり、縦断的資料による研究で、それまでは、横断的資料による集団の変化傾向を、平均化することによって論議する集団の傾向を分析した研究が多かった。もちろんこれは、我国における学術研究の歴史的な背景により、成長研究がアメリカ、ヨーロッパ等に比べて遅れていた事実はある。

ヨーロッパでは、すでにScammon[1] 以前に、Boasが１８９２年にネイチャーで縦断的資料での研究の必要性を強調し、その後、 Davenport や Shuttle-Worth 等により説明されている。彼らの主張は、縦断的資料の必要性について、生体の時間的変異を個々について克明に記録、分析できる長所があるため、横断的資料以上に成長現象を解明できる点であると述べている。我国ではこの頃、大澤によれば、菊池大麓が明治１９年（1886年）に、「東京人類学雑誌」に「人体測定の話」を示したと述べており、その内容が、菊池はＧａｌｔｏｎ，Ｆの人体測定実験室の好成績を引用しながら、成長研究が国民衛生上有用であることを述べている。つまり、やっと我が国の成長研究が始まろうとしていた訳である。このように歴史的背景の異なる中で発展してきた我国の成長研究であるが、今日になってようやく縦断的資料による研究の重要性が浸透してきたようである。縦断的資料による研究の歴史は、Ｇｕｅｎｅａｕ ｄｅ Ｍｏｎｔｂｅｉｌｌａｒｄ（ゲノード、モンベヤール）が１７５９年から１７７７年まで自分の息子の身長について、０歳から１８歳まで計測した記録を、その友人であるＧ．Ｌ．Ｂｕｆｆｏｎ（ビュッフォン）がＨｉｓｔｏｉｒｅ Ｎａｔｕｒｅｌｌｅ（イストワール、ナチュレル）誌に発表したことにその端を発したことが最も古いとされている。Fig 1はＭｏｎｔｂｅｉｌｌａｒｄの息子の０歳から１８歳までの身長の記録をプロットしたものであるが、Ｂｕｆｆｏｎはこの発表の中で、すでに身長発育の季節変動、思春期の発育急増現象について報告している。このように成長研究は１８世紀の中頃からその源があると考えられる。この研究の特徴は、唯一人の個人の追跡、継続によって得られたデータ（縦断的データ）を解析するものであった。この手法が、後にScammon[1] が述べているｓｅｒｉａｔｉｍ研究の手法理論になるわけである。もちろんこの時期に彼も述べているように、この種の研究の流れと平行して、横断的集団データを扱った研究（ 乳幼児を対象にした ）も Roederer[4)], Diets[5)], Clarke[6)] 等によって行われていたが、その後の発展は見られなかった。

１９世紀に入ると、今日の成長研究に大きな影響を与えているＱｕｅｔｅｌｅｔの研究がある。彼の

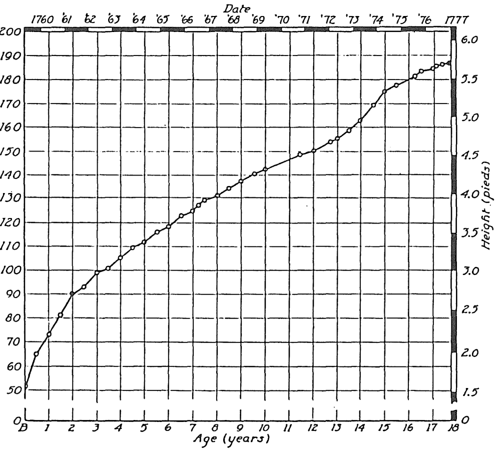

Fig. 1 A point-to-point curve of the eighteenth-century data of Montbeillard on the growth in height of a single individual. The various scales employed in the graph are explained in the text.

最も大きな影響を与えた知見は、『身長の分布はＬａｐｌａｃｅやＧａｕｓｓによって確立された誤差の分布と同様な分布に従う』という、身体的諸属性の分布は正規分布を示すということである。彼のこの発見は、成長現象に対する確立分布の適応であり、つまりは成長学における統計手法の確立として意義があるといえる。一方、彼は５０名の男女について０歳から２０歳までの身長の縦断的記録を解析し、Ｂｕｆｆｏｎの報告した思春期急増期については否定の立場を取り、むしろ発育速度は単調減少すると報告した。また、都会と田舎の子供の身長と体重の差異を検討し、成長現象に対する環境要因の影響についての研究を手掛けた。さらに、彼の成長研究にとって重要な貢献は、身長の発育曲線に対して数学的関数の当てはめを試みたことである。残念ながら、思春期急増現象を否定するという最大の誤ちを犯しているため、この研究はその後あまり話題にされなかった。しかし、数学的関数の当てはめという、成長学における科学的基盤の確立への模索的な意義は評価されるべきであろう。

その後、先にも述べたように、Boas[7)8)], Davenport[9)], Shuttleworth[10)]等の研究により、縦断的研究の重要性が説かれ、近年では、Tanner[2)3)]等の多くの研究者により成長研究の報告がなされている。特に、Tanner[2)3)]はこれらの報告の中で、縦断的資料の分析の手法として、作図法（graphic method）を提唱している（この方法は、方眼紙上に生の観測データ値をプロットし、滑らかな曲線を描くようにするわけだが、個々の特徴が種々であり、傾向分析としては非常に捉えにくい欠点がある。いわゆる臨床的な少例研究には妥当な方法と考えられる）。我が国でも、高石等[11)12)13)]がこの手法により、身長、体重の縦断的資料を扱って、思春期の発育スパートに関して分析を行っている。このように、縦断的資料による研究の必要性は、今日においては言うまでもないことだが、しかし、それら資料を扱う分析手法は、作図法だけではそれなりの短所も備えており不十分である。また、資料収集にも相当な困難が伴うことも事実である。 今後、 このような点を解決しない限り、成長研究の発展性は望めないであろう。特に、我が国においては、縦断的資料の収集が、アメリカのハーバートや英国の Ｈａｒｐｅｎｄｅｎ Ｇｒｏｗｔｈ Ｓｔｕｄｙのように組織的に研究資料として扱われていないために、このことですでに研究の遅れが生じている。ただ、我が国においては、文部省による定期健康診断の結果（特に、身長、体重、胸囲、座高）が小学校１年から高校３年まで、健康診断票として記載されることになっているが、これらの資料もあまり効率良く活用されているとはいえない。

さらに、縦断的資料を扱ううえで重要なその分析手法については、まだ十分に確立されていないのが現状である。もちろん、分析手法の確立については、様々な試みはなされている。 先にも述べたように、Tanner[2)3)]の作図法もその１つである。また、横断的集団データを解析するための統計手法として、因子分析、多変量解析、マルコフチェーン法等があるが、これらの手法は縦断的データに対して直接的な手法として扱えない欠点がある。アロメトリー方式も提唱されたが、時間的変異を扱っているにもかかわらず、２変量の変移点だけから成長現象を論じようとすることは、方法論からしても無理がある。このような中で、成長曲線に数学的関数を fittingさせる研究が、実は、Ｑｕｅｔｅｌｅｔ以後、今日まで続いてきている。しかし、明確な理論的根拠を備えた数学的関数の確立はまだ成就されていない。コンピューター社会を迎えた今日、早くその成就が待たれるところである。

成長学と数学的関数

Ｑｕｅｔｅｌｅｔは成長研究において大きな誤ちを犯しているが、成長学における科学的基盤の模索には大きな貢献を果たしたのではないだろうか。成長研究における統計手法の確立はもちろん、成長曲線に数学的関数を fittingさせる試みは、正に普遍的法則性を求めようとする試みである。数学的関数を人の成長曲線にｆｉｔｔｉｎｇさせる本格的な取り組みは、１９３７年に Jenss and Bayley[14)]、１９４３年に Count[15)]がそれぞれ基本的には出生から７、８歳までに対して数学的関数を適用して解析している。ここで問題とされるのは、なぜ人の成長曲線に対し数学的関数を適用するのかという事である。ここに至る過程については、正に生物学と数学を結ぶ接点の議論が浮上してくるわけである。

この議論の基礎的な核を成したのが、人口増加理論について幾何数列的に増加を示すとしたＭａｌｔｈｕｓの法則である。彼の法則を数学的に説明すれ

ば次のような微分方程式が導かれる。

Ｎ＝Ｎ（ｔ）（Ｎ＝ある国の総人口、ｔ＝ある時点における時刻）とする時、（１－１）式が成り立つ。

（１－１）　$\dfrac{dN}{dt} = \gamma N$

（１－１）式を解くと

（１－２）　$\dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt} = \gamma$　と書き表され、ｔで両辺を積分すると（１－３）式となる。

（１－３）　$\int \dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt}dt = \int \gamma dt$

したがって

（１－４）　$\int \dfrac{1}{N}dN = \gamma t + A$

ここで Ａ は積分定数であるから、故に（１－５）式が導かれる。

（１－５）　$logN = \gamma t + A$

そこで、ｔ＝０でＮ＝N_0ならば、ｌｏｇN_0＝Ａであるから（１－６）式が導かれる。

（１－６）　$N = N_0 e^{\gamma t}$

以上の過程から理解されるように、指数的増加を示すことになる。この数学的アイデアを一般的にマルサスの法則と呼んでいるわけであるが、実は、この法則に至るまでにＧｒａｎｎｔ，Ｊ．Ｐｅｔｔｙ，Ｗ．等の人口増加に関する先駆的な研究があった。Ｍａｌｔｈｕｓはこれらの先駆的研究の基に、彼の著書『An essay on the principle of population』を発表することにより人口増加の基礎理論を確立した。しかし、この段階ではまだｌｏｇｉｓｔｉｃモデルには至っていないのである。

その後、人口の増加率のアイデア、ｄＮ／ｄｔはＮの変化に対して逆に変化するとした密度依存が説かれた。つまり、人口密度が増えれば増加率は減るとした、今日の生態学で云う、人口増加率が人口自身に依存するということが示されたのである。そして、このアイデアが一般的なＬｏｇｉｓｔｉｃモデルに至るのである。

つまり、人口の増加率が人口の関数になると考えると、

（２－１）　$\dfrac{dN}{dt} = f(N)$　であるような簡単な微分方程式として、

（２－２）　$f(N) = \gamma N \dfrac{(K-N)}{K}$　が導かれる。この式こそｌｏｇｉｓｔｉｃ方程式なのである。しかし、Ｌｏｇｉｓｔｉｃ方程式はその後しばらくは世に公表されなかった。

結局、Ｌｏｇｉｓｔｉｃ 方程式が認められたのは、Pearl and Reed[16)17)]がアメリカ合衆国の人口増加に適用したことによるものである。しかしながら、人口論としての方程式としては僅か２０年しかその予見性は保たれなかった。つまり、方程式の終末部が実際のデータ値とはかなり食い違ってくるのである。彼らは人口増加への適用の他に、ラットの成長過程に ｌｏｇｉｓｔｉｃ 方程式を適用している。Fig 2 はそのラットの成長過程を雄、雌についてｌｏｇｉｓｔｉｃ方程式で記述しているグラフである。ここで適用されている式を示す前に、ｌｏｇｉｓｔｉｃ方程式を解く過程を数学的慣例にそって実際に試みることにする。

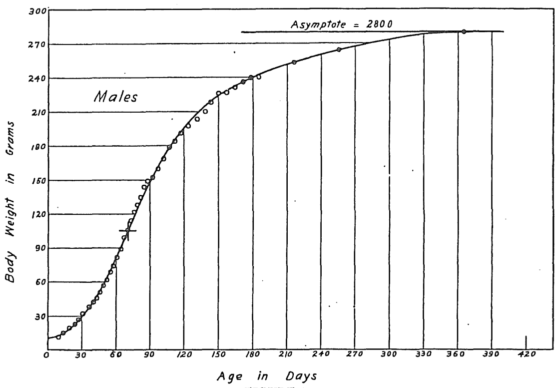

FIGURE 1
Growth of male albino rats (Donaldson's data). The circles give the observations in this and the following diagrams. The smooth curve is the graph of our equation I. The x in this and the following curves denotes the point of inflection.

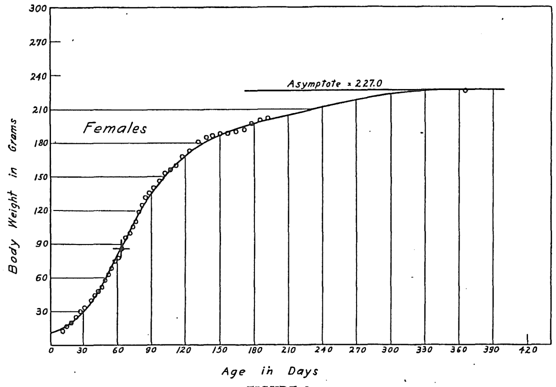

FIGURE 2
Growth of female albino rats (Donaldson's data). The smooth curve is the graph of our equation II.

Fig 2 Growth equation of rats

（３－１）　$\frac{dN}{dt} = \gamma N\frac{(K-N)}{K}$

先ず、（３－１）式を変数分離法を適用して、両辺に Ｎ、ｔ だけの関数がくるように方程式を書き直す。

（３－２）　$\frac{K}{N(K-N)}dN = \gamma dt$

左辺の式を分数の和に書き直す。

（３－３）　$\frac{dN}{N}+\frac{dN}{K-N} = \gamma dt$

Ｎ＞０、　Ｎ＜Ｋ　として、両辺を積分すると、

（３－４）　$\int\frac{dN}{N}+\int\frac{dN}{(K-N} = \int\gamma dt$

となり、

（３－５）　$logN-log(K-N) = \gamma t+A$

のように導かれる。

ここでＡは積分定数と呼ばれ、対数の加法公式から

（３－６）　$log\frac{N}{K-N} = \gamma t+A$　となり

対数の定義、ｌｏｇＸ ＝Ｙ　は　$X = e^{Y}$　であるから

（３－７）　$\frac{N}{K-N} = e^{\gamma t+A}$　となり、

（３－８）　$N = e^{\gamma t+A}(K-N)$　と書き直して、Ｎについて解くと

（３－９）　$N(t) = \frac{CKe^{\gamma t}}{Ce^{\gamma t}+1}$，　$C=e^{A}$

が得られる。

そこで、ｔ が０の時のＮの値をN_0とすれば、これは初期値である。つまり

（３－10）　$N_0 = \frac{CK}{C+1}$　が導かれ、これをＣで解けば

（３－11）　$C = \frac{N_0}{K-N_0}$　のようになり、

（３－９）式に代入すると

（３－12）　$N(t)=\frac{N_0Ke^{\gamma t}}{N_0e^{\gamma t}+K-N_0}$　のように求める増殖過程に適用できる関数が導かれたわけである。Pearl and Reed[16]はこの方式に基づいて、ラットの成長過程に以下のような関数を適用した。

（４－１）　$y=\frac{k}{1+me^{a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n}}$

このように、人口予見の方程式としてはその価値を減じていったが、生物の増殖モデルとしては、これ以後多くの研究者によって適用され、確かめられている。そして、このような生物学と数学を結ぶ歴史的背景から人の成長曲線にＬｏｇｉｓｔｉｃ関数を当てはめる理論的根拠が構築されたと考えられる。ここで、生物学と数学を結ぶ接点の仮定を明確にしておく必要があろう。それはロトカ（ Elements of Mathematical Biology（ 1924 ））の言を借りれば、『数学と生物学を結ぶ仮定として、人口または個体数は本来不連続な整数値であるが、それが連続な値をとるものと考えること、これを数学的記述のための慣習（convention of continuity）といい、同時に時間も連続的に流れるので時間ｔの関数として連続的なものと考えることにする。』このような説明になり、つまり、記述するべき現象が数学的に連続であると仮定することにあるわけである。したがって、このような仮定の基に生物（特に微生物）の増殖過程の記述、さらには人の成長過程（特に身長）の記述に適用されていくのである。

Jenss and Bayley[14]、Count[15]の適用した数学的関数は以下の通りである。

Ｃｏｕｎｔ’ｓ　ｍｏｄｅｌ　：

$y = a + bt + c\log(t)$

Ｊｅｎｓｓ－Ｂａｙｌｅｙ’ｓ ｍｏｄｅｌ　：

$y = a + bt - e^{c+dt}$

以上の関数から、Count[15] のモデルは線形モデルであり、Jenss and Bayley[14] のモデルは指数モデルである。これらのモデルは出生から７、８歳の身長に適用しているため、ｌｏｇｉｓｔｉｃモデルのアイデアはまだ構築されていない。一方、我が国では１９４７年に福田、尾崎[18]が、６～１０才における人の成長曲線に数学的関数モデルを適用した試みがある。この研究で適用された数学的関数は、身長に対しては線形モデルであり、体重に対しては３次、４次多項式モデルを適用したものであるが、客観的な理論的検証が希薄で、これについての検討はあまり知られてはいない。ｌｏｇｉｓｔｉｃモデルが人の成長曲線に適用されてきたのは、　世界的には、Nelder[19][20]等の研究が良く知られている。しかし、実は、我が国において、福田、尾崎[18]の継続研究として、尾崎[21]が思春期における人の成長曲線にｌｏｇｉｓｔｉｃモデルを構築している。彼は独自に以下の微分方程式からｌｏｇｉｓｔｉｃ関数を導いて

いる。

（５－１）$\dfrac{dy}{dt} = ky(l-y)$　：

成長速度（ｄｙ／ｄｔ）がｙに比例すると共に最終身長値（ｌ）に近づくにつれ減弱すると仮定するものとする。

これを解くと

（５－２）$y = \dfrac{l}{1+ce^{-klt}}$

上式は、Robertson[22] の autocatalytic 式と同じであるが、ｙを身長としているところが大きく異なる点である。このように尾崎 [21]は世界に先んじて人の身長に対してｌｏｇｉｓｔｉｃモデルを適用した。ところで、実際にｌｏｇｉｓｔｉｃモデルを適用する場合、Hauspie[23]によれば、以下の式が一般的なｌｏｇｉｓｔｉｃ関数となる。

（６－１）$y = K(1+ce^{-bt})^{\frac{1}{1-m}}$

上式における成長学的意味を示すと、ｍ ＞ １、の場合、下限が ０、上限が Ｋで漸近するＳｉｇｍｏｉｄと呼ばれるＳ字状曲線となる。ちなみに、ｙは成長の現量値、ｔ は時間（この場合は年齢を示す）、ｃ は積分定数、ｂ はＳ字状曲線の広がり率を示す定数である。そして、ｍ ＝ ２、の場合、一般的に成長学に適用されているｌｏｇｉｓｔｉｃ関数となるわけである。

（６－２）$y = p + \dfrac{K}{1+e^{a-bt}}$

次に、特に、ｍ ＝ １、の場合、Gompertz[24]によって導き出されたＧｏｍｐｅｒｔｚ関数となる。

（６－３）$y = P + Ke^{-e^{a-bt}}$

実は、このＧｏｍｐｅｒｔｚ関数はｌｏｇｉｓｔｉｃ関数よりも先に導き出されており、１８３５年にすでに Gompertz[24]により構築されている。人の成長曲線への適用もNelder[19][20]に先んじて、Deming[25]が男子２４名、女子２４名の身長にＧｏｍｐｅｒｔｚ関数を適用している。そしてその後、１９７０年に入り、Marubini[26][27]によりｌｏｇｉｓｔｉｃ関数とＧｏｍｐｅｒｔｚ関数の成長曲線に対するｆｉｔｔｉｎｇの精度の比較を検討しているが、この時点では明確な差は導かれなかった。つまり、両関数とも初期値（下限の値）と上限の値によってｆｉｔｔｉｎｇの精度が変わる性質を備えているため、個々のデータの違いにより両者の関数の精度が左右されるためと考えられる。結局、この両関数は与えられたデータ点（ 観測されたデータ点 ）を通過するように構成されているわけではないため、ｆｉｔｔｉｎｇとしての精度はあまり良くないと結論されている。

このままの状況でｌｏｇｉｓｔｉｃとＧｏｍｐｅｒｔｚ関数を人の成長曲線にｆｉｔｔｉｎｇさせることは精度上限界があるため、Thissen et al[28]はｄｏｕｂｌｅ ｌｏｇｉｓｔｉｃ関数を導いた。

$$y = \frac{a_1}{1+e^{-b_1(t-c_1)}} + \frac{f-a_1}{1+e^{-b_2(t-c_2)}}$$

この関数は思春期の成長プロセスのｆｉｔｔｉｎｇの精度を高めるために構築されたものであり、さらに、低年齢層や思春期以後のプロセスにｆｉｔｔｉｎｇの精度を高めるために Bock and Thissen[29]はｔｒｉｐｌｅ ｌｏｇｉｓｔｉｃ関数を導きだした。

そして、成長プロセスの全般にわたってｆｉｔｔｉｎｇの精度をたかめるために、Preece and Baines[30]の開発した複合ｌｏｇｉｓｔｉｃ関数がある。また、 出生からのプロセスに適用した Jolicoeur et al[31]のＪＰＰＳモデルも開発された。

このように、Ｍａｌｔｈｕｓの人口増加理論から派生した微分方程式モデルがｌｏｇｉｓｔｉｃモデルとして構築され、生物の増殖過程の記述を経て、成長曲線モデルの記述に適用される歴史的経緯を観てきたが、実は、このような流れと平行して polynomial 系の関数も成長プロセスに適用された経緯はある。その歴史的経緯はｌｏｇｉｓｔｉｃモデルほど古くはないが、Vandenberg and Falkner[33],Welch[34], Joossens and Brems-Heyns[35]等によって人の縦断的な身体的発育データに適用された研究がある。

$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots\cdots b_n t^n$$

上式が polynomial の一般型であるが、この関数の利点はｌｏｇｉｓｔｉｃ関数で記述できなかった成長プロセスの増減現象に対して適用できる点である。特に、年間発育量としての速度曲線の記述には有効とされる。 もとろん、微分に対しても自由度があり、発育現量値の ｆｉｔｔｉｎｇ曲線をそのまま微分して速度曲線を得ることも可能である。 しかしながら、

関数の本質的な問題により Hauspie[23] も指摘しているように、whipping 現象（鞭のしなるような現象）がデータによっては生起するため、生物学的現象を反映しない欠点がある。そこで、このような欠点を補うために spline 関数が導かれることになる。この関数は基本的には local polynomial（区分多項式）である。通常区分内においては、cubic polynomial（三次多項式）を適用するため cubic spline とも言われている。したがって、関数の本質上、発育現量値に対する当てはめは、与えられたデータ点をすべて通るように構成されるため、ｆｉｔｔｉｎｇとしての立場より補間としての立場を取る方が妥当といえる。このアイデアは、実は、Tanner [2) 3)] の graphical method から派生されたといえる。つまり、成長曲線を滑らかに記述するということである。この意味において、spline 関数はｌｏｇｉｓｔｉｃモデルや polynomial に比較して精度上には有効であると考えられる。しかし、微分による速度曲線を旨く導くことができない欠点がある。この点ではｌｏｇｉｓｔｉｃ系の関数と共有している。Gasser et al[36) 37)] は身長の年間発育量に対してspline 関数を適用し、さらに最小二乗近似により平均的な発育速度モデルを記述することに成功している。しかし、個々の成長プロセスを記述するには、この手法では数学的理論的根拠が極めて希薄である。 したがって、成長曲線を記述するため、これ以上の有効な手法を求めようとすれば、先ず、発育現量値に対する当てはめの精度は spline 関数以上であること、そして、polynomial系のように微分に自由度があること、この２点に絞られると考えられる。このように考えると、polynomial 系において、標本数（観測データ点）：ｎ に対し、次数を （ｎ－１）次に取る Lagrange 補間、 Chebyshev 補間が考えられる。しかしながら、現在までの所、これらの補間法を成長曲線に適用した研究はない。数学的には、他の関数モデルを構築し、そのモデル関数を補間するという方法で両補間法の有効性を説明している。しかし、実際に成長現象を記述するためには、与えるデータの問題点や生物学的現象への反映における問題などがあり、ただ次数を多く取るだけでは解決されない問題があると考えられる。

数学的 fitting 関数の理論的背景とその妥当性

これまで述べてきたように、成長現象を記述するための数学的関数に関しては、まだ多くの問題点が残されているといえる。 それは、 成長現象の真の姿が見えていないために、適用された数学的関数が何を示しているのか、その点が明確にされないことではないだろうか。つまり、現在までのところ真の人の成長曲線は不明である。したがって、従来まで試みられてきた数学的関数の適用研究は、観測されたデータ点を結んだ生の曲線に対して旨く当てはまっているか（どの程度ｆｉｔｔｉｎｇの精度がいいか）を検討してきたわけである。そして、そこには観測データ点で結んだ曲線が、成長現象のマクロ的な実態であることを前提とした理論的背景を構築している。例えば、ｌｏｇｉｓｔｉｃモデルの適用に関しては、Scammon の発育モデルにあるように、生の観測データによる曲線がＳ字状曲線であることがその適用背景にある。しかし、Scammon の発育モデルの中には、Ｓ字曲線を示さない曲線モデルもあり、このモデルに関しては関数の適用例はあまり示されていない。また、別の角度から、標準発育モデルの作成にあたって、曲線の滑らかさを求めるために適用された polynomial 系の関数もある。いずれにしても、数学的関数適用の理論的背景は、観測データによる生の曲線の概観から判断されているわけである。

そこで、もう一度成長現象に対して数学的関数を適用する場合の仮定を考えてみると、成長現象は本質的には細胞の増殖によるものであり、本来は不連続な数値となるが、それを連続な数値を取るものと仮定するところから数学的関数適用の条件が構築されるわけである。そして、成長は生まれてから常に増殖し続け、経験的には２０歳前後で停滞することになる。もちろん、形質によっては異なるが、そのプロセスがｓｉｇｍｏｉｄと呼ばれるＳ字状曲線を形成することに、関数（特に、ｌｏｇｉｓｔｉｃモデル）適用の理論的根拠が見いだされるわけである。また、グラフィック的に成長曲線の滑らかさを求めようとした根拠に対しては、polynomial 系の関数適用が考えられた。しかしながら、これら数学的関数の成長曲線に対するｆｉｔｔｉｎｇの精度や、適用に対する理論的根拠の問題等、充分に検討されているとは言えない。

東郷[38) 39) 40)] 等は、身長を月１回測定、１日１回測定というように、測定間隔を狭めていった研究を行った。通常は１年に１回か２回程度の測定値を関数適用に使っている。東郷等のように測定間隔を狭めていくと、成長曲線の概観が全く異なった様子を示すように

なる。つまり、波動現象を示すわけである。このように、測定間隔を狭めるという、成長現象を異なった角度からアプローチすることにより、全く別の現象が生起することになる。しかし、測定間隔が異なることにより、成長現象が本質的に異なるとは考えられない。そこで、筆者は東郷等のアイデアをさらに発展させ、時間軸に沿って無限に分割していく測定点というものを考えた。その測定点に対し時間軸を拡大、縮小することにより、その測定点を結ぶ曲線は自己相似的な曲線を形成するのではないだろうか。このように考えると、測定間隔の違いによる成長の概観が理論的に説明がつく。ところが、逆にこのような事情を説明できる数学的関数を構築することは難題である。このような成長現象に従来までの数学的関数を適用することはすでに無意味といえる。このように、新たな成長現象に対する理論的背景の構築を検討することが今後の課題といえるのではないだろうか。すでに筆者は、この理論的背景に対して独自のアイデアを展開し、そして、その理論的背景を満足するための手法としてＷａｖｅｌｅｔの導入を試みている。

成長現象適用へのアイデアとして、筆者がＷａｖｅｌｅｔを導入した背景には近年における数学系、工学系での爆発的ブームが影響されているが、その理論的背景が実は以前から知られているものであり、特に、現在かなりの話題を提供しているカオス、フラクルと非常に密接に関係している点にある。これらカオス、フラクタル現象とＷａｖｅｌｅｔがどのように成長現象との接点を持つのか、このテーマについては次回で議論することにする。今回はこれまでの成長現象適用への数学的関数における歴史的経緯とその理論的背景の妥当性について議論し、その延長線上にＷａｖｅｌｅｔを示唆したまでである。

総　括

成長学への科学的アプローチとして、人の成長曲線への数学的関数の　ｆｉｔｔｉｎｇに関する歴史的経緯とその理論的背景について議論し、Ｗａｖｅｌｅｔの導入までの示唆を提示しようとした。ここでの議論の展開を２つに大別すれば、人の成長曲線への数学的関数適用に関する理論的根拠を、生物の増殖プロセスであるｓｉｇｍｏｉｄ曲線としてのｌｏｇｉｓｔｉｃ　モデルの構築と成長曲線の平滑化および増減プロセスを記述するためのｐｏｌｙｎｏｍｉａｌ系（ｓｐｌｉｎｅ関数系）の構築の２つに分けられる。Hauspie[23]は、前者をｓｔｒｕｃｔｕｒａｌモデル（概念構築モデル）、後者をｎｏｎｓｔｒｕｃｔｕｒａｌモデル（非概念構築モデル）として、これらのｆｉｔｔｉｎｇ関数を概念規定している。この考え方の基本には、成長現象は生物の増殖と同様に微分方程式によって記述、説明されるものであるという概念がある。しかし、東郷等[38)39)40]の研究以来、成長現象の局面が大きく変ってきている。また、成長現象適用のための微分方程式も Preece and Baines[30]モデルやJPPS[31]モデルのように極めて複雑化してきている。

生物学における増殖プロセスの記述をｌｏｇｉｓｔｉｃモデルに求めるのは、式の単純さの中の係数から科学的法則性を論究するためであり、複雑化されれば係数の意味がぼやける欠点が生じる。したがって、人の成長プロセスをただ記述するために、複雑化された微分方程式で適用しようとするならば、ｓｐｌｉｎｅ関数系でも充分有効といえる。つまり、両者の有効価値はそれほど変わらないと考えられる。

結局、これらの問題点を解決するためには、成長現象を生物学から切り離して、独自の概念構成から得られた数学的関数の開発が必要とされる。このような背景から筆者は独自にＷａｖｅｌｅｔを提唱しようとしているのである。しかしながら、今回は提唱するまでの従来の数学的ｆｉｔｔｉｎｇ関数の歴史的経緯とその理論的背景およびその妥当性について言及したまでであり、次回にＷａｖｅｌｅｔと成長学との接点およびその理論的背景について検討するものである。

参　考　文　献

1) Scammon, R. E : The first seriatim study of human growth. American Journal of Physical Anthropology. Vol. X, No. 3 : 329-336, 1927.

2) Tanner, J. M : Growth at adolescence, 2nd ed. Blackwell, Oxford, 1962.

3) Tanner, J. M., Whitehouse, R. H. and Takaishi, M. : Standards from birth to maturity for height, weight, height velocity and weight velocity : British children, 1965. Archives of Disease in Childhood. 41 : 454-471, 1966.

4)Roederer, J. G. : Sermo de pondere et longitudine recens natorum. Comment. Soc. Reg. Scient. Gottingae, Ⅲ, 1753.
5)Dietz, J. F. G. :De temporum in graviditate et partu aestimatione. Diss. Gottingae, pp 61, 1757.
6)Clarke, J. : Observations on some causes of the excess of the mortality of males above that of females. Phil. Trans. Roy. Soc. London, XⅥ : 122-130, 1786.
7)Boas, F. : Observations on the growth of children. Science 72 : 44-48, 1930.
8)Boas, F. Stadies in growth. Human Biology. 4 : 307-350, 1932.
9)Davenport, C. B. : Human metamorphosis. American Journal of Physical Anthropology. 9 : 205-232, 1926.
10)Shuttleworth,F. K.: The physical and mental growth of girls and boys age six to nineteen in relation to age at maximum growth. Monogr. Soc. Res. Child Develop. No. 3, vol. 4. National Research Council, Washington, 1939.
11)高石昌弘・大森世都子・江口篤寿・藤田良子. : 思春期身体発育のパターンに関する研究 － 第一報 男子の身長発育速度および体重発育速度について －. 小児保健研究 26 : 57-63, 1968.
12)高石昌弘・大森世都子・宮部麗子・岩本幸弓. : 思春期身体発育のパターンに関する研究 － 第二報 女子の身長発育速度，体重発育速度および初潮年齢について －. 小児保健研究 26 : 280-285, 1969.
13)高石昌弘・大森世都子. : 思春期身体発育のパターンに関する研究 － 第三報 － 身長発育速度曲線のパターン，特に，思春期急増の開始と発育終了の年齢について －. 小児保健研究 29 : 259-263, 1971.
14)Jenss, R. M. and Bayley, N. : A mathematical method for studying the growth of a child. Human Biology. 9 : 556-563, 1937.
15)Count, E. W. : Growth patterns of the human physique:an approach to kinetic anthropometry. Human Biology. 15 : 1-32, 1943.
16)Pearl, R. and Reed, L. J.:Skew growth curves. Proc. Nat. Acad. Sci. 11 : 16-22, 1925.
17)Pearl, R.: The Biology of population growth. New York. Alfred Knopf. 1925.
18)福田邦三、尾崎久雄：６～１０才に於ける身長、体重の成長方程式に就いて，民族衛生，14 : 53-56, 1947.
19)Nelder,J. A. :The fitting of a generalization of the logistic curve. Biometrics. 17:89-110, 1961.
20)Nelder, J. A. : An alternative from of a generalized logistic equation. Biometrics. 18 : 614-616, 1962.
21)尾崎久雄：思春期の成長方程式， 民族衛生，16 : 52-57, 1949.
22)Robertson, T. B.:On the normal rate of growth of an individual. Arch. Entw. Mech. ＸＸＶ : 581-614, 1908.
23)Hauspie, R. C. : Mathematical models for the study of individual growth patterns. Rev. Epidem. et Sante Publ. 37 : 461-476, 1989.
24)Gompertz, B. : On the nature of the function expressive of the law of human mortality. Phil. Trans. Royal Soc. 115 : 513-585, 1825.
25)Deming, J.:Application of the Gompertz curve to the observed pattern of growth in length of 48 individual boys and girls during the adolescent cycle of growth. Human Biology. 29 : 83-122, 1957.
26)Marubini, E., Resele, L.F.and Barghini, G. : A comparative fitting of the Gompertz and Logistic functions to longitudinal height data during adolescence in girls. Human Biology. 43 : 237-251, 1971.
27)Marubini, E. , Resele, L. F. , Tanner, J. M. and Whitehouse, R. H. : The fit of Gompertz and Logistic curves to longitudinal data during adolescence on height, sitting height and biacromial diameter in boys and girls of the Harpenden Growth study. Human Biology. 44 : 511-523, 1972.
28)Thissen,D., Bock, R.D., Wainer,H. and Roche, A. F. : Individual growth in stature : A comparison of four growth studies in the U.S.A. Annals of Human Biology. 3 : 529-542, 1976.

29) Bock, R. D. and Thissen, D. : Statistical problems of fitting individual growth curves. In: Johnston, F. E., Roche, A. F., Susanne, C., eds. Human Physical Growth and Maturation. New York and London, Plenum Press. 265-290, 1980.

30) Preece, M. A. and Baines, M. J.:A new family of mathematical models describing the human growth curve. Annals of Human Biology. 5 : 1-24, 1978.

31) Jolicoeur, P., Pontier, J., Pernin, M. O. and Sempe, M. : A lifetime asymptotic growth curve for human height. Biometrics. 44 : 995-1003, 1988.

32) Jolicoeur, P., Pontier, J. and Abidi, H. : Asymptotic models for the longitudinal growth of human stature. American Journal of Human Biology. 4 :461-468, 1992.

33) Vandevberg, S. G. and Falkner, F.:Hereditary factors in growth. Human Biology. 37 : 357-365, 1965.

34) Welch, Q. B. : Fitting growth and research data. Growth. 34 : 293-312, 1970.

35) Joossens, J. V and Brems, Heyns. E. : High power polynomial regression for the study of distance, velocity and acceleration of growth. Growth. 39 : 535-551, 1975.

36) Gasser, T., Kohler, W., Muller, H. G. and Kneip, A. : Velocity and acceleration of height growth using kernel estimation. Annals of Human Biology. 11 : 397-411, 1984.

37) Gasser, T., Muller, H. G., Kohler, W., Prader, A., Largo, R. and Molinari, L. : An analysis of the mid-growth and adolescent spurts of height on acceleration. Annals of Human Biology. 12 : 129-148, 1985.

38) Kobayashi, M. and Togo, M. : Twice-daily measurements of stature and body weight in two children and one adult. American Journal of Human Biology. 5 :193-201, 1993.

39) Togo, M. and Togo, T. :Time-series analysis of stature and body weight in five siblings. Annals of Human Biology. 9 : 425-440, 1982.

40) Togo, M and Togo, T. : Initiation time of adolescent growth spurt estimated by a certain through in time - series analysis of monthly anthropometric and urinalysis data in five siblings. Human Biology. 60 : 223-235, 1988.

（受理　平成９年３月21日）