

ダイオード検波器のノイズ特性

—非直線代数・微分方程式の確率過程論的取扱いに関する 2, 3 の考察—

新 美 吉 彦

Noise Characteristics of Diode Detectors

Yoshihiko NIIMI

Nonlinear device has been used in electronics and in communication engineering: i. e., such that diode detector and nonlinear oscillator etc. In this paper, these nonlinear devices, but mainly being considered diode detectors, are handled and studied in the direction of its noise characteristics. In that case, two categories are distinguished, such that, the algebraic or the zero memory transformation, and the other is the differential or the transformation with memory.

1. ま え が き

ふつうのダイオード検波器はすべて非直線性の素子である。そのような非直線素子が回路網のなかに含まれている場合のノイズ特性は、一般に非直線の代数方程式又は微分方程式、更に一般には関数方程式の変数がすべて確率変数である場合の応答を研究する問題に帰着される。このような方程式の取扱いは一般的には困難であるが、最近、ソ連で盛んに研究されるようになった。この論文では、それらの研究の動向の紹介と著者のそれに対する 2, 3 の考察を述べることにする。

1.1. 問題の分類と定式化

次の 2 つの場合を区別して考えて行く方が都合がよい：すなわち

1.1.1. 先づ、最っとも簡単な非直線系として、時間 t における出力関数 $y(t)$ が入力関数の同じ瞬間における値 $x(t)$ のみで決まってしまう場合を考える：

$$(1) \quad y(t) = g[x(t)]$$

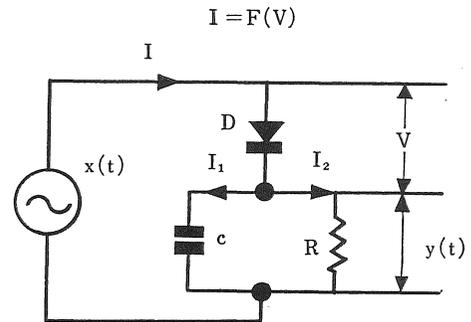
ここで、 $g(x)$ は非直線関数である。このような場合を代数的或いは零メモリーの場合と呼ぼう。

1.1.2. 次に、Fig. 1 のようなダイオード検波器の回路を考えよう。

この回路の入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ との間には、次の関係式が成立する。

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{C}F(x-y)$$

ここで、 $F(V)$ は、ダイオードの電流—電圧特性である。このように微分方程式で入出力関係が表わされる場



第1図 検波回路

合をメモリーを持つ場合、或いは微分方程式的な場合と呼んでいる。

メモリーを持つ場合で、第1に問題になるのは $F(V)$ の近似方法である。それにはふつう次の 3 通りの方法がある。

(1) 多項式近似方法, (2) 破線近似 (または **piecewise-linear approximation**) (3) 指数関数近似 以下では、先づ、それぞれの近似方法による取扱いの特徴とその応用例を示す。

結局、Noise が印加された場合の非直線回路の研究は次のように定式化される：系（回路）のパラメーター及び、入力信号 $x(t)$ の統計的特性が与えられたとして、出力信号 $y(t)$ の統計的特性を求めること：次に零メモリーの場合とメモリーをもつ場合にわけて問題の解法を試みよう。

2. 零メモリーの場合

2.1. 確率密度の変換

今、ランダム変数 $x_1 = x(t_1) \cdots, x_n = x(t_n)$ の n -次元確率密度 $w_x(x_1, \cdots, x_n)$ が既知であるとして、次の代数変換によって生ずる新変数の確率密度を求める：

$$(3) \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \vdots \\ y_n = g_n(x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

ここで、 g_1, \cdots, g_n は部分的に連続であるとする。今、もし、(3)の逆関数：

$$(4) \begin{cases} x_1 = h_1(y_1, \cdots, y_n), \\ \vdots \\ x_n = h_n(y_1, \cdots, y_n), \end{cases}$$

が一価であれば、新しい確率密度 $w_y(y_1, \cdots, y_n)$ は次式で求められる：

$$(5) w_y(y_1, \cdots, y_n) = w_x[h_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, h_n(y_1, \cdots, y_n)] |D_n|,$$

ここで、 $|D_n|$ は変数変換のヤコビアンである。

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

特殊な場合として、1次元の場合には、(5)式は

$$(5a) w_y(y_1, y_2) = w_x[h(y_1), h(y_2)] |h'(y_1)h'(y_2)|,$$

となる。(n=2 の場合)

更に、特殊な場合として、

$$(7) y_1 = g_1(x_1) = x_1, \quad y_2 = g_2(x_1, x_2),$$

を考えよう。ここで、逆函数

$$(8) x_1 = h_1(y_1) = y_1, \quad x_2 = h_2(y_1, y_2)$$

は一価であるとする。このヤコビアンは、

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial h_2}{\partial y_2},$$

従って、

$$(9) w_y(y_1, y_2) = w_x[y_1, h_2(y_1, y_2)] |\partial h_2 / \partial y_2|$$

となる。ランダム変数 y_2 の一次元確率密度は(9)を積分すればよい：

$$(10) w(y_2) = \int w_x[y_1, h_2(y_1, y_2)] |\partial h_2 / \partial y_2| dy_1,$$

この(10)式を用いると、次の如く、2変数 x_1 と x_2 の和、差、積、商の確率密度が計算出来る：

$$(11) w(x_1 + x_2) = w(y) = \int w_x(x_1, y - x_1) dx_1,$$

$$(12) w(x_1 - x_2) = w(y) = \int w_x(x_1, x_1 - y) dx_1,$$

$$(13) w(x_1 x_2) = w(y) = \int w_x(x_1, \frac{y}{x_1}) \frac{dx_1}{|x_1|},$$

$$(14) w\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = w(y) = \int w_x(x_1, y x_1) |x_1| dx_1,$$

(11)~(14)式の応用例として、2つのランダム変数 x_1 と x_2 が正規分布であるとき、その積の確率密度を求めてみる：すなわち、

$$w_x(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \left\{ -\frac{1}{2(1-R^2)} \left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2Rx_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right\}$$

のとき、(13)を用いると、

$$(15) w(y) = w(x_1 x_2) = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{R x_1 x_2}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} \right\} \times \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2(1-R^2)} \left(x_1^2 + \frac{\sigma_1^2 x_1^2 x_2^2}{\sigma_2^2 x_1^2} \right) \frac{dx_1}{x_1} \right\} \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ \frac{R x_1 x_2}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} \right\} K_0 \left(\frac{x_1 x_2}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} \right),$$

ここで、 $K_0(z) = (\pi i / 2) H_0^{(1)}(iz)$ である。

又、

$$(16) w(x_2/x_1) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}}{\pi(\sigma_2^2 - 2Rx_1x_2 + \sigma_1^2x_2/x_1)}$$

となる。

2.2. 多項式近似をした場合のモーメント関数

今、非直線特性 $y = g(x)$ が変数の或る範囲で解析函数であるとすれば、次のようにテイラー展開することが可能である：

$$(17) y = g(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots,$$

ここで、

$$a_k = \frac{1}{k!} g^{(k)}(c).$$

従って、この場合には第 n 項迄採用すれば、 n 次近似特性の場合として取扱うことができる。しかしながら、このような展開がたとえ不可能な場合でも、多項式近似は可能である。

すなわち、数値解析でよく用いられる方法、最小2乗近似、を用いると、

$$(18) g(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x-c)^k$$

の2乗積分が一定の範囲内で最小になるように a_k を決めればよい：

$$(19) I = \int_a^b [g(c+x) - \sum_{k=0}^n a_k(x-c)^k]^2 dx \text{ in } L_2$$

ここで、 a, b はランダム変数 x が大体その範囲内に占まっているように決める： $a+c \leq \xi \leq b+c$,

すなわち、言い換えれば、

$$\int_{a+c}^{b+c} w(x) dx \approx 1$$

なる等式が満足されるように決定すればよい。しかし、 $w(x)$ を直接用いるよりも次のようにおいた方が便利である：

$$(20) b = m_1 \text{ (平均値)}, \quad b - a = \lambda \sqrt{m_2 - m_1^2}.$$

ここで、 $m_1 = \langle x \rangle$, $m_2 = \langle x^2 \rangle$ である。又、確率密度 $w(x)$ が正規分布とあまり違わない場合には λ は約2又は3に等しく取ればよい。

更に、(19)式が最小値をとる為の必要条件は、

$$\frac{\partial I}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0,$$

である。(19)式にこの条件を採用すると、次の式が導かれる：

$$(21) \sum_{j=0}^n \frac{1 - (-1)^{j+k+1}}{j+k+1} b^{j+k+1} a_j = \int_a^b x^k g(x+c) dx,$$

この式から次々に a_0, a_1, \dots を決めることが出来る。

そこで、簡単の為に、次のように仮定する。

$$(22) y(t) - a_0 \equiv y(t), \quad x(t) - \langle x \rangle \equiv x(t),$$

そうすると、 $y(t)$ のモーメント関数 \tilde{m}_n は次のように書かれる。

$$(23) \tilde{m}_1(t) = a_2 \mu_2(t,t) + a_3 \mu_3(t,t,t) + \dots + a_n \mu_n(t, \dots, t), \\ \tilde{m}_2(t_1, t_2) = a_1^2 \mu_2(t_1, t_2) + a_1 a_2 [\mu_3(t_1, t_2, t_2) + \mu_3(t_1, t_2, t_1)] + a_1 a_3 [\mu_4(t_1, t_2, t_2, t_2) + \mu_4(t_1, t_1, t_2, t_2)] + \dots$$

ここで、

$$(24) \mu_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv \langle x(t_1) \dots x(t_n) \rangle$$

とおいた。注意すべきことは、非直線素子を通った信号のモーメントは、もとの入力信号のモーメントの高次項を一般に含んでいることである。これは当然のことと言へば言へるが、それが、式の上で明確な形式に書かれていることが重要である。

多項式近似の場合の具体例：

2.2.1. 非直線特性が、次の式で表わされる場合：

$$(25) y(t) = a_2 x^2 - a_4 x^4,$$

更に、 $x(t)$ は平均値 0 で、相関関数 $k(\tau)$ が次の形で与えられたガウス雑音と仮定する：

$$(26) \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = k(\tau) = \sigma^2 R(\tau),$$

この場合の y の第 1, 第 2 モーメントを計算することは極めて容易である：

$$(27) \langle y(x) \rangle = a_2 \langle x^2 \rangle - a_4 \langle x^4 \rangle, \\ \langle y(t_1)y(t_2) \rangle = a_2^2 \langle x^2(t_1)x^2(t_2) \rangle + a_4^2 \langle x^4(t_1)x^4(t_2) \rangle - a_2 a_4 [\langle x^2(t_1)x^4(t_2) \rangle + \langle x^4(t_1)x^2(t_2) \rangle],$$

$x(t)$ が平均値 0 で、かつ、分散 σ^2 をもつガウス雑音の場合には、

$$(28) \langle x^j \rangle = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (j-1) \sigma^j & \text{偶の } j \text{ に対して,} \\ 0 & \text{奇の } j \text{ に対して,} \end{cases}$$

となる。さらに、正規過程 $x(t)$ の双モーメントは次のようであることが知られている：

$$(29) \langle x^j x^k \rangle = \sigma^{j+k} \sum_{l=0}^{\infty} N_{jl} N_{kl} \frac{R^l(\tau)}{l!}.$$

ここで、

$$(30) \begin{cases} N_{jk} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j F^{(k+1)}(x) dx, \\ F^{(k+1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2}, \end{cases}$$

である。

表 1. N_{jk} の値

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	2·1	0	0	0	0
3	0	-3·1	0	-3·2·1	0	0	0
4	3·1	0	4·3·1	0	4·3·2·1	0	0
5	0	-5·3·1	0	-5·4·3·1	0	-5·4·3·2·1	0
6	5·3·1	0	6·5·3·1	0	6·5·4·3·1	0	6·5·4·3·2·1

この N_{jk} の値は表 1 のようなマトリックス形式に書かれる。この Matrix は次の性質をもつ：

- (α) 主対角以上のすべての要素は 0,
- (β) 主対角及び以下の要素で零でないのは j と k が共に偶か、又は共に奇の場合のみ,
- (γ) 非零の要素 N_{jk} は、次のようにして得られる、

$$j(j-1)(j-2) \dots (j-k+1).$$

それからその結果に $j-k-1$ から 1 迄のすべての奇数を掛ける、例へば、

$$N_{62} = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1,$$

(δ) N_{jk} の符号はもし k が奇ならば負であり、 k が偶ならば正である。

この結果を利用すると、

$$(31) \langle x^2 x_\tau^2 \rangle = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)], \\ \langle x^2 x_\tau^4 \rangle = \sigma^4 [3 + 12R^2(\tau)], \\ \langle x^4 x_\tau^4 \rangle = \sigma^8 [9 + 72R^2(\tau) + 24R^4(\tau)],$$

となる。これらを(27)式に用いると、

$$(32) \langle y \rangle = a_2 \sigma^2 - 3a_4 \sigma^4, \\ \langle y y_\tau \rangle = a_2^2 \sigma^4 (1 + 2R^2) - 6a_2 a_4 \sigma^6 (1 + 4R^2) + a_4^2 \sigma^8 (9 + 72R^2 + 24R^4),$$

特に y の分散は、

$$(33) D_y = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = 2a_2^2 \sigma^4 - 24a_2 a_4 \sigma^6 + 96 \cdot a_4^2 \sigma^8,$$

となる。

2.2.2. 非直線特性が、次の式で表わされ：

$$(34) y = a_1 x + a_2 x^2,$$

さらに、入力信号が、ノイズ $\xi(t)$ と信号 $s(t)$ との和として表わされる場合：

$$(35) \begin{cases} x(t) = s(t) + \xi(t), \\ s(t) = E \cos(\omega_0 t + \phi_0), \end{cases}$$

ここで、 E は一定で、 ϕ_0 は一様に分布した初期位相とする。さらに、ノイズ $\xi(t)$ は平均値 0 で、相関関数は $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$ で表わされる定常ガウスノイズとする。そうすると、次のように平均値及び相関関数が得ら

れる：

$$(36) \quad \begin{aligned} \langle y \rangle &= a_2 \langle s^2 \rangle + a_2 \langle \xi^2 \rangle, \\ \langle y y_\tau \rangle &= a_1^2 \langle s s_\tau \rangle + a_1^2 \langle \xi \xi_\tau \rangle + \\ & a_2^2 \langle s^2 s_\tau^2 \rangle + 4a_2^2 \langle s s_\tau \rangle \langle \xi \xi_\tau \rangle + 2a_2^2 \cdot \\ & \langle s^2 \rangle \langle \xi^2 \rangle + a_2^2 \langle \xi^2 \xi_\tau^2 \rangle, \end{aligned}$$

この式を導く場合に、信号 s とノイズ ξ とは統計的に独立であると仮定している：すなわち、次の式が成立するとした、

$$(37) \quad \begin{aligned} \langle s \xi_\tau \rangle &= \langle s \rangle \langle \xi_\tau \rangle, \\ \langle s^2 \xi_\tau^2 \rangle &= \langle s^2 \rangle \langle \xi_\tau^2 \rangle, \\ \langle s s_\tau \xi \xi_\tau \rangle &= \langle s s_\tau \rangle \langle \xi \xi_\tau \rangle, \dots \end{aligned}$$

又、 $\langle s \rangle = \langle s_\tau \rangle = 0$ 、 $\langle \xi \rangle = \langle \xi_\tau \rangle = 0$ であるから、

$$(37a) \quad \langle s^2 s_\tau \rangle = 0, \quad \langle \xi^2 \xi_\tau \rangle = 0,$$

よって、

$$(37b) \quad \langle \chi \chi_\tau^2 \rangle = \langle \chi_\tau \chi^2 \rangle = 0,$$

又、

$$(38) \quad \begin{aligned} \langle \xi \xi_\tau \rangle &= \sigma^2 R(\tau), \\ \langle \xi^2 \xi_\tau^2 \rangle &= \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)] \end{aligned}$$

なることを知っているから、(37)は、信号の相関を知ればよい：

$$(39) \quad \begin{aligned} \langle s s_\tau \rangle &= E^2 \langle \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_0) \rangle, \\ &= \frac{1}{2} E^2 \langle \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi_0) + \cos \omega_0 \tau \rangle, \end{aligned}$$

ところが、我々は一様位相であることを仮定しているから、結局

$$(39a) \quad \langle s s_\tau \rangle = \frac{1}{2} E^2 \cos \omega_0 \tau,$$

となる。又、同様にして

$$(40) \quad \langle s^2 s_\tau^2 \rangle = \frac{1}{2} E^2 (1 + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau),$$

(40)、(39)式を(36)式に代入すると、

$$(41) \quad \begin{aligned} \langle y \rangle &= \frac{1}{2} a_2 E^2 + a_2 \sigma^2, \\ \langle y y_\tau \rangle &= \frac{1}{2} a_1^2 E^2 \cos \omega_0 \tau + a_1^2 \sigma^2 R(\tau) + \\ & \frac{1}{2} a_2^2 E^4 (1 + \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau) + 2a_2^2 \sigma^2 E^2 R(\tau) \cdot \\ & \cos \omega_0 \tau + a_2^2 \sigma^2 E^2 + a_2^2 \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)], \end{aligned}$$

となる。この式から、出力の相関関数は、直ちに得られる。

$$(42) \quad \begin{aligned} k_y(\tau) &= \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \\ & -\frac{1}{2} a_1^2 E^2 \cos \omega_0 \tau + a_1^2 \sigma^2 R(\tau) + \frac{1}{8} a_2^2 E^4 \\ & \cdot \cos 2\omega_0 \tau + 2a_2^2 \sigma^2 E^2 R(\tau) \cos \omega_0 \tau + 2a_2^2 \sigma^4 R^2(\tau), \end{aligned}$$

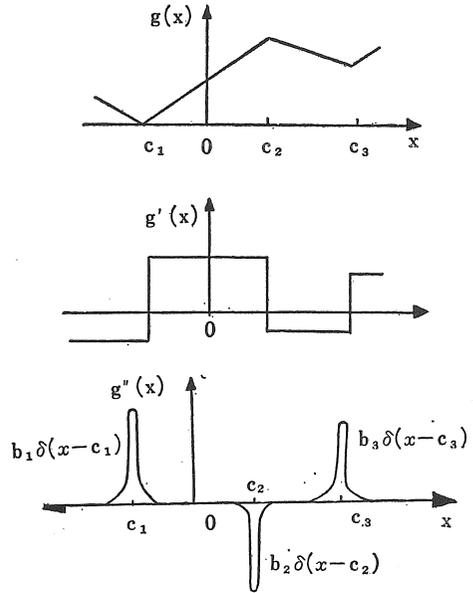
となる。

3. 部分的に線形な特性を持つ素子による変換回路のモーメント関数

部分的に線形な特性をもつ場合の回路による変換は、ふつう2つの方法によって取扱われる：(1)2次元確率密

度を用いた級数展開による方法(直接法)(2)特性函数と積分を含んだ方法がある。ここでは(1)の方法のみについて考える。

3.1. ガウス雑音入力の場合：この場合、非直線特性は



第2図 部分的に直線特性

一価で Fig. 2 に示したようになっていると仮定する。

又入力雑音は平均値0で相関関数、 $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$ を持つ場合と仮定する。この場合の入力の一次元確率密度は

$$(43) \quad w(x) = \frac{1}{\sigma} F' \left(\frac{x}{\sigma} \right),$$

ここで、

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy,$$

である。又2次元確率密度は、

$$(44) \quad w(\xi, \xi_\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{p=0}^{\infty} F^{(p+1)} \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) F^{(p+1)} \left(\frac{\xi_\tau}{\sigma} \right) \frac{R^p}{P!},$$

で与えられる。そこで、関数 $g(x)$ は連続で、かつ部分的に線型であると仮定し、導関数は $g'(x)$ 点 c_1, c_2, \dots, c_n で不連続と仮定すれば、 $g''(x)$ は次式で与えられる：

$$(45) \quad g''(x) = \sum_{l=1}^r b_l \delta(x - c_l),$$

ここで、 $\delta(z)$ はデラックのデルタ関数である。従って、出力 $y = g(x)$ の平均値

$$(46) \quad \langle y \rangle = \int g(x) w(x) dx = \frac{1}{\sigma} \int g(x) F' \left(\frac{x}{\sigma} \right) dx,$$

は、次の形式に書くことができる：

$$(47) \quad \langle y \rangle = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \int_{x_1}^{x_1} g(x) dF \left(\frac{x}{\sigma} \right),$$

この積分を部分積分すると、

$$(48) \quad \int_{-\infty}^{x_1} g(x) dF \left(\frac{x}{\sigma} \right) = g(x_1) F \left(\frac{x_1}{\sigma} \right) - \int_{-\infty}^{x_1} g'(x) F \left(\frac{x}{\sigma} \right) dx,$$

ここで次の関数を定義する：

$$(49) \quad \begin{cases} F^{(-1)}(x) = \int_{-\infty}^x F(x) dx = xF(x) - \int_{-\infty}^x xF'(x) dx \\ \frac{d}{dx} F^{(-1)}(x) = F(x), \quad F^{(-1)}(-\infty) = 0, \end{cases}$$

この関数を用いると、(48)は次式に変形される：

$$(50) \quad \int_{-\infty}^{x_1} g(x) dF\left(\frac{x}{\sigma}\right) = g(x_1) F\left(\frac{x_1}{\sigma}\right) - \sigma \int_{-\infty}^{x_1} g'(x) dF^{(-1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \\ dF^{(-1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) = g(x_1) \cdot F\left(\frac{x_1}{\sigma}\right) - \sigma g'(x_1) F^{(-1)}\left(\frac{x_1}{\sigma}\right) \\ + \sigma \int_{-\infty}^{x_1} g''(x) F^{(-1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx,$$

(47)式より、(50)式において $x_1 \rightarrow \infty$ とすると、平均値 $\langle y \rangle$ が得られる。 $x_1 \rightarrow \infty$ のとき、 $F(x_1/\sigma)$ は 1 に近づき、 $F^{(-1)}(x_1/\sigma)$ は x_1/σ に近づくから

$$\langle y \rangle = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} [g(x_1) - x_1 g'(x_1)] + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} g''(x) F^{(-1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx,$$

又は、

$$(60) \quad \langle y \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - xg'(x)] + \sigma \sum_{l=1}^{\infty} b_l F^{(-1)}\left(\frac{c_l}{\sigma}\right),$$

又、(44)から、 $\langle yy_\tau \rangle$ は次のように級数の形式に書くことができる：

$$(61) \quad \langle yy_\tau \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) F^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx \frac{R^n(\tau)}{n!},$$

この式の最初の項は $\langle y \rangle^2$ である。この最初の項を $\langle yy_\tau \rangle$ から引けば、相関関数が得られる：

$$(62) \quad k_y(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) F^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!},$$

(62)式の各種分を求めるためには、部分積分を 2 回用いる： $n=1$ は、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) F''\left(\frac{x}{\sigma}\right) \frac{dx}{\sigma} = - \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) \cdot F'\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx,$$

従って、

$$(63) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) F''\left(\frac{x}{\sigma}\right) \frac{dx}{\sigma} = -\sigma g'(\infty) F(\infty) + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} g''(x) F\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx,$$

$n \geq 1$ に対しては、被積分項が $\pm \infty$ で 0 になるから容易に求められる。最後に、(45)式を(63)に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) F''\left(\frac{x}{\sigma}\right) \frac{dx}{\sigma} = -\sigma g'(\infty) + \sigma \sum_{l=1}^{\infty} b_l F\left(\frac{b_l}{\sigma}\right), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) F^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \frac{dx}{\sigma} = \sigma \sum_{l=1}^{\infty} b_l F^{(n-1)}\left(\frac{c_l}{\sigma}\right), \\ (n > 1),$$

が得られる。最後にこの式を(62)式に代入しなければならない。

3.2. 3.1.の結果の色々な場合への応用例：

3.2.1. $g(x)$ が一本の直線よりなる場合：

この場合には $r=0, b_l=0$ 従って (62)式の第 1 項のみが残る。この場合には、単に信号が $|g'|$ 倍されるだけである。

3.2.2. $g(x)$ が 2 つの線分から成る場合：

この場合には

$$(64) \quad g'(x) = \begin{cases} \alpha, & x < c_1 \\ \beta, & x > c_1 \end{cases}$$

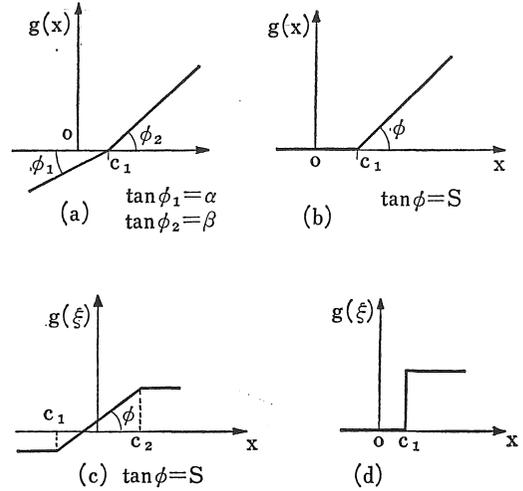
従って、

$$g'(\infty) = \beta, \quad b_1 = \beta - \alpha,$$

よって、次式を得る：

$$(65) \quad k_y(\tau) = \sigma^2 \left[\beta + (\alpha - \beta) F\left(\frac{c_1}{\sigma}\right) \right] R(\tau) + \\ + (\beta - \alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[F^{(n-1)}\left(\frac{c_1}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!},$$

この特殊な場合の色々な場合が Fig. 3 に示してある。



第 3 図 典型的な piecewise linear なダイオード特性

特に、 c_1 が原点の場合には、 $c_1=0$ で、

$$(65a) \quad k_y(\tau) = \frac{\sigma^2}{4} (\alpha + \beta)^2 R(\tau) + \sigma^2 (\beta - \alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[F^{(n-1)}(0) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!},$$

$$= \frac{\sigma^2}{4} (\alpha + \beta)^2 R(\tau) + \frac{\sigma^2}{2\pi} (\beta - \alpha)^2 (\text{Rarcsin } R + \sqrt{1 - R^2} - 1),$$

さらに、Fig. 3 (b) のような場合、

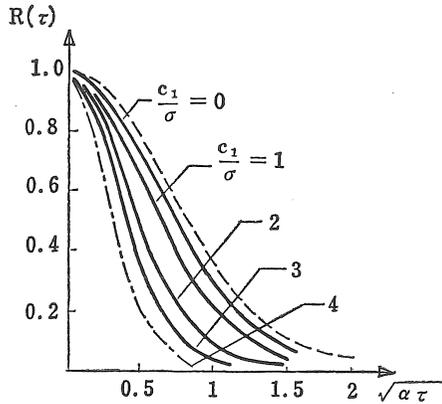
$$(66) \quad g(x) = \begin{cases} S(x - c_1), & x > c_1 \text{ のとき} \\ 0, & x < c_1 \text{ のとき} \end{cases}$$

には、 $\alpha=0, \beta=S$

となる。この場合にはランダム関数 $x(t)$ の尖頭値を考え、かつ、それらの間の相関の程度を計算することができる：

$$(67) \quad k_y(\tau) = S^2 \sigma^2 \left\{ F^2\left(-\frac{c_1}{\sigma}\right) R(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n-1)}\left(\frac{c_1}{\sigma}\right)^2 R^n(\tau) \right\}$$

Fig. 4 には $R_y(\tau) = k_y(\tau) / k_y(0)$ が $\sqrt{\sigma} \tau$ の関数として計算された場合が示してある。この場合、入力相関関数は、 $R(\tau) = e^{-\sigma^2 \tau^2}$ であり、又級数は $n=7$ 迄計算した。又曲線は、 $\gamma = c_1/\sigma$ が S_1 の値に対してプロ



第 4 図

ットされている。

又、次に Fig. (c) の如き、2 個の頂点を持つ準対称なリミッターを考える：

$$(68) \quad y = g(x) = \begin{cases} S c_2, & x > c_2, \\ S x, & c_1 < x < c_2, \\ S c_1, & x < c_1, \end{cases}$$

この場合には、

$$g'(\infty) = 0, \quad b_1 = S, \quad b_2 = -S,$$

従ってこの場合の相関関数は、

$$(69) \quad k_y(\tau) = S^2 \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[F^{(n-1)} \left(\frac{c_2}{\sigma} \right) - F^{(n-1)} \left(\frac{c_1}{\sigma} \right) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!},$$

又、平均値は、

$$(70) \quad \langle y \rangle = S c_2 + S \left[c_1 F \left(\frac{c_1}{\sigma} \right) - c_2 F \left(\frac{c_2}{\sigma} \right) + \sigma F' \left(\frac{c_1}{\sigma} \right) - \sigma F' \left(\frac{c_2}{\sigma} \right) \right],$$

上の各々の例における出力の分散を計算するには、 $k_y(\tau)$ の式で $\tau=0$, $R=1$ とおけばよい。しかし、このようにすると分散は、無限級数の形で与えられることになる。しかし、確率密度 $w(x)$ を用いて $\langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2$ を計算すれば、分散は求められる。こうして求めた結果は有限の項しか含んでいない。

もう 1 つの具体例として Fig. 3 (d) の場合を考えよう。この場合には、 $g(x)$ は、次式で与えられる：

$$(71) \quad y = \begin{cases} q, & x > c_1 \text{ のとき,} \\ 0, & x < c_1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

このときは 1 度部分積分を行へば充分である。しかしもし、

$$(71a) \quad g(x) = \begin{cases} \beta(x - c_1)^2, & x > c_1 \text{ のとき,} \\ 0, & x < c_1 \text{ のとき} \end{cases}$$

のときには、3 回積分する必要がある。各々の場合の相関関数に対する表現式は、夫々

$$(72) \quad k_y(\tau) = q^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[F^{(n)} \left(\frac{c_1}{\sigma} \right) \right]^2 R^n(\tau),$$

及び

$$(72a) \quad k_y(\tau) = 4\beta^2 \sigma^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[F^{(n-2)} \left(-\frac{c_1}{\sigma} \right) \right]^2 R^n(\tau),$$

で与えられる。

3.2. Rayleigh 入力の場合：今、入力が次の Rayleigh 分布を持つ場合：すなわち、

$$(73) \quad w(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2}$$

ここで、 $A(t)$ は狭帯域のガウス雑音の振巾であるとすると、 $g(x)$ が次の式で表わされる場合を考えよう：

$$(74) \quad y = \begin{cases} q, & A > A_0, \\ 0, & A < A_0, \end{cases}$$

$z(t) = A^2(t)/2\sigma^2$ なる変換をほどこすと、

$$(74a) \quad y = \begin{cases} q, & z > z_0, \\ 0, & z < z_0, \end{cases}$$

となる。ここに $z_0 = A_0^2/2\sigma^2$ である。従って、

$$(75) \quad \begin{cases} \langle y \rangle = q \int_{z_0}^{\infty} e^{-z} dz = q e^{-z_0}, \\ \langle y y \tau \rangle = q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{2n}}{(n!)^2} \left[\int_{z_0}^{\infty} L_n(z) e^{-z} dz \right]^2, \end{cases}$$

となる。この(75)を計算するために、ラーゲル多項式の定義を用いる：

$$(76) \quad \int_0^{\infty} L_n(z) e^{-z} dz = - \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^n e^{-z}) \Big|_{z=z_0} = -z_0 L^{(1)}_{n-1}(z_0) e^{-z_0},$$

ここで、

$$L_n^{(1)}(z) = z^{-1} e^z \cdot \frac{d^n}{dz^n} (z^{n+1} e^{-z}),$$

である。この公式を用いると、出力は、実際にはパルス列となるが、その相関関数は、

$$(77) \quad k_y(\tau) = q^2 e^{-2z_0} z_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{2n}(\tau)}{(n!)^2} [L_{n-1}^{(1)}(z_0)]^2,$$

となる。参考のために、多項式(76)のはじめの 2, 3 を書いておく：

$$(78) \quad L_0^{(1)}(z) = 1, \quad L_1^{(1)}(z) = 2 - z, \quad L_2^{(1)}(z) = 6 - 6z + z^2, \quad L_3^{(1)}(z) = 24 - 36z + 12z^2 - z^3, \dots$$

これらの式を用いると、

$$(77a) \quad k_y(\tau) = q^2 \frac{A_0^4}{4\sigma^4} e^{-A_0^2/\sigma^2} \left[Q^2 + \left(1 - \frac{A_0^2}{4\sigma^2} \right) Q^2 + \left(1 - \frac{A_0^2}{2\sigma^2} + \frac{A_0^4}{24\sigma^2} \right) Q^0 + \dots \right],$$

となる。又 $y(t)$ の分散は、(77a)式で $\tau=0$, $Q=1$ とおけば計算することができる。しかし、直接一次元確率密度を用いて計算すれば、

$$(79) \quad \begin{cases} \langle y^2 \rangle = q^2 e^{-z_0}, \\ D y = k_y(0) = q^2 e^{-2z_0} (e^{z_0} - 1), \end{cases}$$

又、

$$(80) \quad R_y(\tau) = k_y(\tau) / k_y(0) = B_0 [Q^2(\tau) + B_2 Q^4(\tau) + B_3 Q^0(\tau) + \dots],$$

となる。ここで、

$$B_0 = \frac{A_0^4}{4\sigma^2} (e A_0^2 / 2\sigma^2 - 1),$$

$$B_2 = (1 - A_0^2/4\sigma^2)^2,$$

$$B_3 = \left(1 - \frac{A_0^2}{2\sigma^2} + \frac{A_0^4}{24\sigma^2}\right)^2,$$

これらの公式を用いて、3項取って計算した結果が Fig. に示してある。これらの計算では、 $Q(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ を用いた。(図中では点線で示してある)。又、次の量

$$\gamma = \frac{A_0}{\sigma} - \frac{\langle A \rangle}{\sigma},$$

はリミッターの動作レベルを規定している。図では、 $\gamma = -1, 0, 1, 2, 3$ に対応する曲線をえがかれている。又、

$$\frac{\langle A \rangle}{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.25$$

が Rayleigh ノイズに相当するものであることに注意。

3.3. Rayleigh ノイズ $A(t)$ が次の特性をもつ系を通過した場合：

$$(81) \quad y = \begin{cases} S(A - A_0), & A > A_0, \\ 0, & A < A_0, \end{cases}$$

この場合は、 $w(A) = (A/\sigma^2)e^{-A^2/2\sigma^2}$ を用いると、次のように平均値を得る：

$$(82) \quad \langle y \rangle = S\sigma\sqrt{2\pi}F(-\alpha),$$

$$\langle y^2 \rangle = 2S^2\sigma^2[e^{-\alpha^2/2} - \sqrt{2\pi}\alpha F(-\alpha)],$$

又、分散は：

$$(83) \quad D_y = S^2\sigma^2 [2e^{-\alpha^2/2} - 2\sqrt{2\pi}\alpha F(-\alpha) - 2\pi F^2(-\alpha)],$$

ここで、 $\alpha = A_0/\sigma$ 。

次に相関関数 $k_y(\tau)$ を求めるために、先づ

$$(84) \quad w(z, z\tau) = e^{-z-2z\tau} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z)L_n(z\tau) \frac{Q^{2n}}{(n!)^2},$$

を用いよう。ここで、 $L_n(z)$ はラーゲルの多項式。

$$(85) \quad L_n(z) = e^z \cdot \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}),$$

である。更に、(81)の変換は次の変換と等価であることに注意する：

$$(85a) \quad y = \sqrt{2}S\sigma \begin{cases} z^{\frac{1}{2}} - z_0^{\frac{1}{2}}, & z > z_0, \\ 0 & z < z_0, \end{cases}$$

ここで $z = A^2/2\sigma^2$, $z_0 = A_0^2/2\sigma^2$ である。(84) から $\langle y \rangle^2$ を引くと、相関関数

$$(86) \quad k_y(\tau) = 2S^2\sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(n!)^2} Q^{2n}(\tau),$$

が得られる。ここで、

$$(86a) \quad h_n = \int_{z_0}^{\infty} (z^{\frac{1}{2}} - z_0^{\frac{1}{2}}) L_n(z) e^{-z} dz$$

である。又、(86a) を部分積分すると、

$$(86b) \quad h_n = - \int_{z_0}^{\infty} z L_{n-1}^{(1)}(z) e^{-z} dz^{\frac{1}{2}},$$

が得られる。ここで、 $L_n(z)e^{-z} dz = d[zL_{n-1}^{(1)}(z)e^{-z}]$ を用いた。

更に、パラメーター μ を導入して、 μ について微分すると、(86b) は、次のように書かれる：

$$(86c) \quad h_n = \frac{\partial}{\partial \mu} L_{n-1}^{(1)} \left(-\frac{\partial}{\partial \mu} \right) \int_{z_0}^{\infty} e^{-\mu z} dz^{\frac{1}{2}} \Big|_{\mu=1}$$

この式から、 $z = A^2/2\sigma^2 = a^2/2$ とおけば、(86c) の積分を確率積分の形式に表現出来る：

$$\int_{z_0}^{\infty} e^{-\mu z} dz^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\mu a^2/2} da = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} F(-\alpha\sqrt{\mu}),$$

すなわち結局、

$$(86d) \quad h_n = \sqrt{\pi} \frac{\partial}{\partial \mu} L_{n-1}^{(1)} \left(-\frac{Q}{\partial \mu} \right) \left[\sqrt{\frac{1}{\mu}} F(-\alpha\sqrt{\mu}) \right]_{\mu=1},$$

もう一步進めて、計算に都合のよい公式として次の形式を用いるとよい：

$$(86e) \quad h_n = \sqrt{\pi} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} [\mu^{n-(3/2)} F(-\alpha\sqrt{\mu})] \Big|_{\mu=1},$$

これは次の関係を用いれば計算される。

$$-z L_{n-1}^{(1)}(z) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (n-1)(n-2)\cdots l (-z)^l,$$

$$\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (n-1)(n-2)\cdots l \mu^{l-1} \frac{\partial^l F_1}{\partial \mu^l} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\partial^{n-l} \mu^{n-1}}{\partial \mu^{n-l}} \frac{\partial^l F_1}{\partial \mu^l} = \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} (\mu^{n-1} F_1),$$

ここに、 $F_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} F(-\alpha\sqrt{\mu})$ 、

最初の2, 3の係数を示すと、

$$(87) \quad h_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} [F(-\alpha) + \alpha F'(\alpha)],$$

$$h_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} [F(-\alpha) + \alpha F'(\alpha) + \alpha^2 F''(\alpha)],$$

$$h_3 = -\frac{3\sqrt{\pi}}{8} [F(-\alpha) + \alpha F'(\alpha) + 2\alpha^2 F''(\alpha) + \frac{1}{3}\alpha^3 F'''(\alpha)],$$

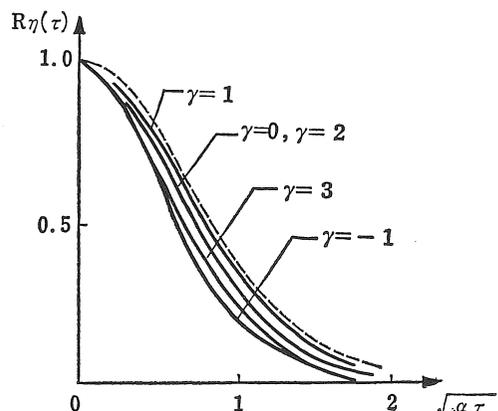
である。

今、(87)の3項のみを残して、他の項はすべて0とおくと、 $y(t)$ の相関係数は、次式で与えられる：

$$(88) \quad R_y(\tau) = B^{-1} (h_1^2 Q^2 + \frac{1}{4} h_2^2 Q^4 + \frac{1}{36} h_3^2 Q^6),$$

ここで、 $B = e^{-\alpha^2/2} - \sqrt{2\pi}\alpha F(-\alpha) - \pi F^2(-\alpha)$, Fig. 5 では $R_y(\tau)$ が threshold

$$\gamma = \frac{A_0}{\sigma} - 1.25 = -1, 0, 1, 2, 3.$$



第 5 図

に如何に関係しているか示してある。ここでは $Q(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ として計算した。図から τ が大きい所では $R(\tau)$ は小さい threshold でも、広がっていることがわかるであろう。この $Q(\tau)$ は、振巾の envelope の相関係数の 1 種とみなすことができる。しかし、 $Q(\tau) \neq \langle A A_\tau \rangle - \langle A \rangle^2$ であることに注意。

4. 系が微分方程式で表現されている場合の問題

4.0. 取扱い上の考察と分類

系が微分方程式で表わされている場合の具体例として、前に述べた RC 検波器がある：

$$(89) \quad \dot{y} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{C}F(x-y),$$

この微分方程式は、たとえ x, y が確率過程の変数でなく、普通の時間関数であっても一般には解くことが困難である。従って、この方程式を取扱うには、回路の物理的性質などから特殊な場合に分類して取扱うのが適当である。一般に、或る取扱い方法を採用する場合の基準は、関数 $F(V)$ のかたち、系のパラメーター、及び入力力の相関時間 τ_{cor} と検波器の時定数の比による。そこで、次の 5 つの場合が考えられる。

1. もし、不等式

$$\tau_{cor} \gg RC$$

が成立する場合には、第 1 近似として、(89)式の微係数 \dot{y} を無視することができ、

$$y = RF(x-y)$$

なる、代数方程式を取扱えばよい。この場合の取扱い方法としては準定常近似方法がある。

2. 又、入力雑音 $x(t)$ が狭帯域であれば、すなわち、周波数 ω_0 で、位相、振巾が非常にゆっくり変化する振動の場合には、 $x(t)$ は大きい相関時間 τ_{cor} を持っている。もし、

$$(90) \quad \tau_{cor} \gg RC \gg \frac{2\pi}{\omega_0},$$

が成りたてば、包絡線方法、これは準定常近似の変形法である、が使用できる。ふつうのラジオ受信機は皆これにあたる。

3. 多くの場合、“小さい非線型性”の方法が大変便利である。これは、問題が第 1 近似としては線型問題とみなし得る場合で、非直線効果は高次近似でのみ考慮すればよい。これは、例へば、もとの方程式において非直線が小さい場合、又は、適当な 0 次近似変換をほどこすことによって線型化可能な場合等に都合がよい。

4. 今、時定数 RC が小さい場合、すなわち

$$(91) \quad \tau_{cor} \ll RC,$$

が成立する場合には、入力ノイズはマルコフ過程とみなすことが出来るから、Fokker-Planck の方程式を利用できる。これは、測定においておこる問題で、出力の平均値 $\langle y \rangle$ 及び分散 D_y を知りたい場合などがそうである。そのようなときには、一次元の定常分布を知れば

充分である。この一次元の定常分布が Fokker-Planck の方程式の解である。

5.

$$(92) \quad \tau_{cor} \sim RC$$

(92)式が成立し、かつ信号が強い場合は大変むづかしくなる。例へば、入力信号はマルコフ過程と仮定しても、出力は多次元のマルコフ過程を含んでいる。従って、多次元の Fokker-Planck の方程式を用いなければ結果が得られない。

4.1. 狭帯域ノイズの検出：包絡線方法

もし、入力信号が非常にゆっくり変わる ($\tau_{cor} \gg RC$) とすれば、微係数 \dot{y} は無視できる。従って(89)は、

$$(89a) \quad \frac{1}{RC}y = \frac{1}{C}F(x-y)$$

となる。この式を y について解けば、代数変換の方程式

$$(93) \quad y(t) = g[x(t)],$$

が得られる。これはすでに前に取扱った問題であるからここでは論じない。

次に、ふつうのラヂオ受信機の場合、すなわち(90)が成立する場合を論じよう。

入力信号は、

$$(94) \quad x(t) = \xi(t) + E \cos \omega_0 t = \\ = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + E \cos \omega_0 t = \\ = B(t) \cos[\omega_0 t + \varphi],$$

とする。即ち、ある中心周波数 ω_0 の正弦波に位相と振巾がゆっくり変化するノイズが加った入力とする。この(94)を(89)に代入すると、

$$(95) \quad \dot{y} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{C}F[A \cos(\omega_0 t + \varphi) - y],$$

上式を t から $t + (2\pi/\omega_0)$ 迄積分すると、

$$(96) \quad y\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - y(t) = \\ = \frac{1}{RC} \int_t^{t + \frac{2\pi}{\omega_0}} \{-\eta(s) + RF[A(s) \cos(\omega_0 s + \varphi) - y(s)]\} ds.$$

ところが、(90)から $y(t)$ はこの周期の間に、わずかしかな変化しないから、左辺を $(2\pi/\omega_0)\dot{y}$ で置き換えることができ、 $y(s) \simeq y(t)$ とみなしてもよい。振巾 A と位相 φ も又この周期の間一定とみなすことができる。従って、(96)は

$$(97) \quad \dot{y} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{C} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{\omega_0}} F[A \cos(\omega_0 s + \varphi) + y] ds,$$

あるいは、

$$(97a) \quad \dot{y} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{C} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[A(t) \cos x - y] dx,$$

このようにしても猶上の式を一般的に解くことはむづかしい。そこで、更に、 $\tau_{cor} \gg RC$ なる仮定を考慮すると、これは振巾はゆっくり変化することになる。そこで $y(t)$ の重要なスペクトル成分は次の周波数帯域に含ま

れているとみなすことが出来る。

$$(98) \quad |\omega - \omega_0| \sim \Delta\omega = \frac{1}{\tau_{cor}}$$

そして、この周波数バンド内では、 $j\omega = i\omega y_\omega$ は y_ω/RC よりずっと小さい。従って (97a) の \dot{y} は y/RC に比較してずっと小さくなる。そこでこれを無視すると、

$$(97b) \quad y = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A \cos x - y) dx,$$

この式は、入力振巾 $A(t)$ から出力電圧 $y(t)$ を導出する代数方程式である。そこで次にこの式的具体例を考えよう。

それは、ダイオード特性が部分的に直線、2次式及び指数関数の場合である。

4.2. 具体例1：この場合はふつつ直線検波の場合と呼ばれる場合で、電圧—電流特性が、

$$(99) \quad I = F(V) = \begin{cases} \frac{1}{R_i} V, & V > 0, \\ 0, & V < 0, \end{cases}$$

ここで、 R_i はダイオードの通電状態における内部抵抗である。(99)を(97b)に代入すると、

$$(100) \quad y = \frac{AR}{\pi R_i} \int_0^\gamma (\cos x - \frac{y}{A}) dx,$$

ここで、

$$(101) \quad \gamma = \arccos y/A,$$

さらに、無次元量：

$$(102) \quad k \equiv \frac{y}{A}$$

を導入すると、これは包絡線再生係数と呼ばれている、

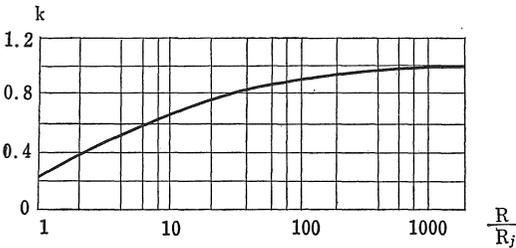
(101) は、

$$k = \frac{R}{\pi R_i} \int_0^{\arccos k} (\cos x - k) dx,$$

この式を積分すると、最後に次の式を得る。

$$(103) \quad \frac{R}{R_i} = \frac{\pi k}{\sqrt{1-k^2} - k \arccos k}$$

R/R_i と k との関係が、Fig. 6 に示してある。



第6図 R/R_i と k との関係

この図から R/R_i が増すにつれて、包絡線再生係数 k は単調に増加することがわかる。直線検波器の特長は、出力電圧 $y(t)$ が $A(t)$ に直線的に関係していることである。さらに、 k が求めれば、出力 $y(t)$ は、ただちに

$$(104) \quad y(t) = kA(t),$$

として計算することができる。従って、

$$(105) \quad \langle y \rangle = k \langle A \rangle, \quad \langle y \tau \rangle = k^2 \langle A A \tau \rangle,$$

ここで $\langle A A \tau \rangle$ は、前に求めた式、

$$\langle A A \tau \rangle = \frac{\pi}{2} \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{4} Q^2 + \frac{1}{64} Q^4 + \frac{1}{256} Q^6 + \dots \right),$$

で与えられる。

4.3. 具体例2：2乗検波器。この場合、電圧—電流特性は、

$$(106) \quad F(V) = \begin{cases} \beta V^2, & V > 0, \\ 0, & V < 0, \end{cases}$$

ここで β は無次元の定数である。(97b)を用いると、

$$(107) \quad y = \beta \frac{R A^2}{\pi} \int_0^\gamma (\cos x - \frac{y}{A}) dy,$$

ここで、 $\gamma = \arccos y/A$ 、である。再び $k = y/A$ とすると、

$$(107a) \quad k = \beta \frac{R A}{\pi} \int_0^{\arccos k} (\cos s - k)^2 ds,$$

この式を積分すると、

$$(108) \quad \beta R A = \frac{2\pi k}{(1+2k^2) \arccos k - 3k\sqrt{1-k^2}},$$

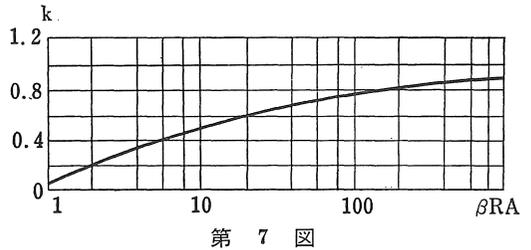
この式では、 k は前のような意味をもっていない、ただ A にだけ依存している。

$\beta R A \leq 0.1$ の場合には $k \ll 1$ が成立するから $\arccos k \approx \pi/2$ 、よって、

$$(109) \quad k \approx \frac{1}{4} \beta R A, \quad y \approx \frac{1}{4} \beta R A^2,$$

第7図には k と $\beta R A$ との関係のプロットしてある：

$$(110) \quad k = f(\beta R A), \quad f \text{ は (108) の逆関数,}$$



第7図

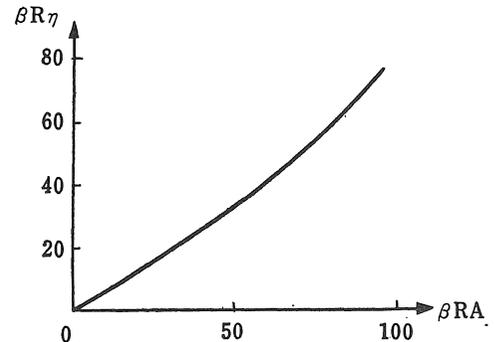
この(110)から、 y と A との関係：

$$(111) \quad \beta R y = \beta R A f(\beta R A),$$

が求められる。例へば、 f の1次の項迄とると

$$\beta R y = 0.583(\beta R A) + 0.002(\beta R A)^2,$$

この式が第8図にプロットしてある。



第8図

4.4. 指数関数検波器：この場合特性曲線は

$$(112) \quad I = F(V) = i_0 e^{aV}$$

ここで i_0, a は定数で、実際の酸化被覆陰極ダイオードの場合には $i_0 = 50$ から 60 マイクロアンペア, $a = 5$ ないし 10 ボルト⁻¹ である。

この場合, (97b) 式は

$$(113) \quad y = Ri_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{a(\cos s - y)\} ds = \\ = Ri_0 e^{-ay} I_0(aA),$$

となる。ここに, $I_0(z) = J_0(iz)$ である。

この(113)式は, $aRi_0 I_0(a < A >)$ が 1 より大又は小なるに従って種々の方法で, 解くことができる。

もし, $a < A \ll 1$ だとすると, y は一定電圧 y_0 からあまり変わらない: y_0 は

$$(114) \quad ay_0 e^{ay_0} = aRi_0$$

の根である。(114)式と次の展開式

$$I_0(aA) = 1 + \frac{1}{4}(aA)^2 + \frac{1}{64}(aA)^4 + \dots \\ xe^x = x_0 e^{x_0} + (1+x_0)e^{x_0}(x-x_0) + (x-x_0)^2 + \dots,$$

を用いると, (113) から

$$(115) \quad y - y_0 = \frac{ay_0}{4(1+ay_0)} aA^2,$$

又, ARi_0 と aA との両方共大なる場合には:

$$(116) \quad aSi_0 I_0(aA) \gg 1,$$

なる式が成立する場合は, 実用的には非常に重要である。この場合には n/A は 1 に比較して充分大きい。

(116) を用いて, (113) を逐次近似的に求めることができる。(113) 式は次の形に書ける:

$$x + \ln x = z,$$

ここで, $x = a\eta$, $z = \ln[aSi_0 I_0(aA)]$,

次式によって逐次近似式を定義する:

$$(117) \quad x_n = z - \ln x_{n-1}, (n=1, 2, \dots).$$

この式から第 2 近似式は,

$$(118) \quad y = \frac{1}{a} \ln a \frac{Ri_0 I_0(aA)}{\ln[aRi_0 I_0(aA)]},$$

次に, (118) を用い, 前の最小近似法によって係数 a_1

と a_2 を決定し, c を振巾の平均値に取ると,

$$y = a_0 + a_1(A - \langle A \rangle) + a_2(A - \langle A \rangle)^2,$$

これらの多項式の項を, (118) のテイラー級数展開の対応する項に等しいとおくと,

$$(119) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{a}(z_1 - \ln z_1), \\ a_1 = \left(1 - \frac{1}{z_1}\right) \vartheta, \\ a_2 = \frac{a}{2} \frac{\vartheta^2}{z_1^2} + \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(1 - \frac{\vartheta}{a \langle A \rangle} - \vartheta^2\right), \end{cases}$$

ここで,

$$(120) \quad z_1 = \ln a Ri_0 + \ln I_0(a \langle A \rangle), \\ \vartheta = \frac{I_1(a \langle A \rangle)}{I_0(a \langle A \rangle)},$$

パラメーター $a \langle A \rangle$ を増加すると, $z_1 \rightarrow \infty$, $\vartheta \rightarrow 1$, となる。従って, $a_1 \rightarrow 1$, $a_2 \rightarrow 0$, となる。従ってこの場合,

指数関数検波器による信号の変換は理想検波器に近づく:

$$(121) \quad y = a_0' + A, (a_0' = a_0 - \langle A \rangle).$$

これは正確に包絡線を再生する。

任意の検波器の場合には, 次の条件:

$$(122) \quad Ri \ll R, \text{ ここで } Ri = \frac{1}{\partial F / \partial V}, \text{ 且つ } V > 0,$$

なる条件が成立すればする程, 検波器は理想的なものになる。

5. 小さい非線型の方法が適用できる場合

ここでは, 素子の電圧-電流特性が指数関係で表わされているときの他の方法を示す。

$$(123) \quad F(V) = i_0 e^{aV};$$

そうすると, 前述の微分方程式は,

$$(124) \quad \dot{y} + \frac{1}{RC} y = \frac{i_0}{C} e^{ax - ay},$$

となる。ここで新変数:

$$(125) \quad x = e^{ay},$$

を導入すると, (124)式は次のようになる:

$$(126) \quad RC \dot{x} + x \log x = ai_0 R e^{a\xi},$$

この(126)を満たす $x(t)$ の特性は, パラメーター $ai_0 R$ の大きさ及び, 時定数 RC に対する過程 $x(t)$ の相関時間 τ_{cor} の比で決まる。例へば, $\tau_{cor} \gg RC$ の場合には, 準定常的な方法が適用できる, 又 $\tau_{cor} \ll RC$ の場合には Fokker-Planck の方程式を含んだ stochastic な方法が用いられる。しかし, $\tau_{cor} \sim RC$ の場合には, これらいずれの方法も適当ではない。このことは, $ai_0 R$ が或る条件を満たすときには用いることができる他の方法が必要になる。ここでは, 小さい非線型性と呼ばれるその方法だけを述べる。この方法は逐次近似的に(126)の解を求めることである。先づ, (126)の平均値を取った式の解として, 0次近似を求める:

$$(127) \quad RC \dot{x}_0 + x_0 \log x_0 = ai_0 R \langle e^{a\xi} \rangle,$$

ここで $\xi(t)$ は定常入力と仮定し, それがはるか過去にはじまっていると仮定する。そうすると, x_0 の定常値は, 次の方程式を満たすことになる。

$$(128) \quad x_0 \log x_0 = ai_0 R \langle e^{a\xi} \rangle,$$

平均値 $\langle e^{a\xi} \rangle$ は特性関数 $\langle e^{i\mu\xi} \rangle$ の $\mu = ia$ とおいたものである。いま $\xi(t)$ がガウス雑音で, 平均値 0 であるとすれば,

$$(129) \quad \langle e^{i\mu\xi} \rangle = e^{-\sigma^2 \mu^2 / 2}, \quad \langle e^{a\xi} \rangle = e^{a^2 \sigma^2 / 2}$$

よって, (128) は

$$(130) \quad x_0 \log x_0 = ai_0 R e^{a^2 \sigma^2 / 2},$$

となる。 $y_0 = \frac{1}{a} \log x_0$ であるから,

$$(131) \quad y_0 e^{ay_0} = i_0 R e^{a^2 \sigma^2 / 2},$$

を y_0 は満たす。

次に, 偏差

$$(131) \quad z = x - x_0,$$

に対する微分方程式は、

$$(132) \quad RCz + (x_0 + z) \log(x_0 + z) - x_0 \log x_0 = ai_0 R (e^{a\zeta} - \langle e^{a\zeta} \rangle),$$

となる。もし、 $x \log x$ がテーラー展開出来れば、

$$(133) \quad x \log x = x_0 \log x_0 + (\log x_0 + 1)z + \frac{1}{2x_0} z^2 - \frac{1}{6x_0^2} z^3 + \dots,$$

(133)式は、

$$(134) \quad RCz + (\log x_0 + 1)z = ai_0 R \zeta - \frac{z^2}{2x_0} + \frac{z^3}{6x_0^2} - \dots$$

となる。ここで

$$(135) \quad \zeta = e^{a\zeta} - \langle e^{a\zeta} \rangle,$$

とおいた。この方程式は、次の非直線項を含んでいる。

$$(136) \quad \frac{z^2}{2x_0} - \frac{z^3}{6x_0^2} + \dots = f(x_0 + z) - f(x_0) - f'(x_0)z,$$

ここで、 $f(x) = x \log x$,

小さい非直線性の方法は、この非直線項が比較的小さく、第1近似としては、無視できるという仮定にもとづいている。従って、(134)の第1近似式として、

$$(137) \quad RCz_1 + (\log x_0 + 1)z_1 = ai_0 R \zeta,$$

より高次の近似を構成する方法ためには、補助的な小さいパラメーター ε を導入する。そして、(131)の z を、形式的に、

$$(138) \quad z = z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 + \dots$$

とかく、そこで、(134)式を

$$RCz + (\log x_0 + 1)z = ai_0 R \zeta - \frac{\varepsilon}{2x_0} z^2 + \frac{\varepsilon^2}{6x_0^2} z^3 - \dots,$$

とかき、(138)を代入するし、 ε の同巾項を等しいとおくと、次々の近似式が得られる。

$$(139) \quad RCz_1 + (\log x_0 + 1)z_1 = -z_1^2 / 2x_0,$$

又、(136)のテーラー級数展開を構成することが不便なとき、又は、そのような展開が存在しないときには、(136)の全非線型項に小さいパラメーターの何乗かをかければよい。とにかく、この方法では、全非線型項

$$f(x_0 + z_1) - f(x_0) - f'(x_0)z_1$$

は z_2 の方程式の右辺に表われるだけであるから、 z_2 は計算して求めることが出来る。一度 z_2 が求まれば、小さいパラメーター ε を1に等しくおけばよい。

(139)は低い近似の関数しか含まず、又、未知関数については、線型であるから、容易に解くことができる。従って、(137)の解は、

$$(140) \quad z_1(t) = \frac{ai_0}{C} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{\log x_0 + 1}{RC}(t-t')\right\} \zeta(t') dt',$$

又、(135)から $\zeta(t)$ の平均値は0であるから

$$(141) \quad \langle z_1 \rangle = 0$$

である。

次に、第1近似 $z_1(t)$ の相関関数及び分散を求める。先づ、入力 $\xi(t)$ は平均値0、相関関数 $h(\tau) = a^2 R(\tau)$ の定常ガウス過程と仮定する。そうすると(135)から

$$(142) \quad \langle \zeta \zeta \tau \rangle = \langle e^{a\zeta + a\zeta \tau} \rangle - \langle e^{a\zeta} \rangle^2$$

となる。 $\langle e^{a\zeta + a\zeta \tau} \rangle$ は2次元の特性関数を用いて表わ

すことができる。 $\Theta_2(-ia, -ia)$ を導き、(129)を用いると、

$$(142a) \quad \langle \zeta \zeta \tau \rangle = e^{a^2 \sigma^2} [e^{a^2 \sigma^2 R(\tau)} - 1],$$

を得る。又、相関関数 $z_1 z_{1\tau}$ は、

$$(143) \quad \langle z_1 z_{1\tau} \rangle = \left(\frac{ai_0}{C}\right)^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-\beta(t-t_1) - \beta(t+\tau-t_2)} \cdot \langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle dt_1 dt_2,$$

に等しい。ここで、

$$(144) \quad \beta = (\log x_0 + 1) / RC,$$

変数変換：

$$(145) \quad \rho = t_2 - t_1 - \tau, \quad s = (t_1 + t_2) / 2,$$

を利用すると、

$$(143a) \quad \langle z_1 z_{1\tau} \rangle = \left(\frac{ai_0}{C}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho \int_{-\infty}^{t+\frac{1}{2}\tau-\frac{1}{2}|\rho|} e^{-\beta(t_2-t_1-\tau)} \cdot \langle \zeta \zeta_{\rho+\tau} \rangle ds,$$

となる。

この積分を行うと、結局、

$$(143b) \quad \langle z_1 z_{1\tau} \rangle = \left(\frac{ai_0}{C}\right)^2 \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|\rho|} \langle \zeta \zeta_{\rho+\tau} \rangle d\rho,$$

となる。この式で特に $\tau=0$ とおくと、

$$(144) \quad \langle z_1^2 \rangle = \left(\frac{ai_0}{C}\right)^2 \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta\rho} \langle \zeta \zeta_{\rho} \rangle d\rho,$$

(142a)を用いると、

$$(145) \quad \langle z_1^2 \rangle = \frac{(ai_0 R)^2}{\log x_0 + 1} \cdot e^{a^2 \sigma^2} \cdot \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} (e^{a^2 \sigma^2 R(\tau)} - 1) e^{-\beta\tau} \cdot d\tau,$$

を得る。

出力、 $y = \frac{1}{a} \log(x_0 + z)$ の統計的特性は y をテイラー級数に展開することによって求められる。

$$(146) \quad y = y_0 + \frac{z}{ax_0} - \frac{z^2}{2ax_0^2} + \dots,$$

ここで、第1近似のみを考えると、

$$(147) \quad \langle y \rangle = y_0 - \frac{1}{2ax_0^2} \langle z_1^2 \rangle,$$

$$\langle (y - a_0)(y_{\tau} - y_0) \rangle = \frac{1}{a^2 x_0^2} \langle z_1 z_{1\tau} \rangle,$$

特に、分散は：

$$(148) \quad D_y = \frac{1}{a^2 x_0^2} \langle z_1^2 \rangle,$$

となる。

次に、入力信号の相関時間 τ_{cor} が $\tau_{cor} \cong RC$ の order のときに、上述の方法が適用できる条件を求めておく。小さい非直線性の方法は、()式の非直線項が、線型項 $(\log x_0 + 1)z$ に比して小さい場合に適用できる。

すなわち、非直線項の第1項に対して次式が得られる：

$$|(\log x_0 + 1)z| \gg \left| \frac{z^2}{2x_0} \right|, \text{ 又は}$$

$$(149) \quad |z| \ll 2x_0(\log x_0 + 1),$$

この式で、 z は(139)式の解(第1近似)を取ってよい。 $x_0(\log x_0 + 1)$ は、

$$(150) \quad x_0 \log x_0 = ai_0 R e^{a^2 \sigma^2 / 2} \sim ai_0 R e^{-a^2 \sigma^2 / 2} \sigma(\zeta),$$

とわづか異なる。ここで $\sigma(\zeta)$ は標準偏差で、

$$(151) \quad \sigma(\zeta) \sim e^{a^2 \sigma^2}$$

である。一方、(140)式を用いると、次式を得る：

$$(152) \quad z_1 \leq \frac{ai_0}{C} \cdot \frac{RC}{\ln x_0 + 1} \zeta,$$

この式で不等号は、 $\zeta(t)$ が時定数

$$\tau_{cor} \leq RC / (\log x_0 + 1),$$

で、急激に変化する場合に相当する。

反対に、 $\tau_{cor} \approx RC$ では、(143)式の $e^{-\beta(t-t')}$ によって、 z_1 が主に決まるから、 \sim の方を取るべきである。

(152)式を(149)式に代して、評価式(151)、及び $\zeta \approx \sigma(\zeta)$ を考慮すると、

$$\log x_0 \ll e^{a^2 \sigma^2 / 2} x_0$$

を得る。この式の両辺に x_0 を掛けて、(150)を用いると、

$$(153) \quad ai_0 R \gg x_0, \text{ or } ai_0 R \log(ai_0 R) \gg x_0 \log x_0$$

を得る。再び(150)を用いると、

$$(154) \quad \log(ai_0 R) \gg e^{a^2 \sigma^2 / 2},$$

なる非直線性の条件が得られる。

結局、小さい非直線性の方法は、パラメーター $ai_0 R$ が大きく、あまりノイズレベルが大きくない場合に適用可能である。

6. Fokker-Planck の方程式を用いる方法

入力信号が系の時定数に比較して充分小さい相関時間をもつときには、出力 $x(t)$ は Fokker-Planck の方程式を用いる stochastic な方法を用いて解析できる。ここでは指数関数的検波器を用いた前述の回路(系)を取扱って見る。これは、次の形の方程式で書かれる：

$$(155) \quad RC \dot{x} + x \log x = ai_0 R \langle e^{a\zeta} \rangle + ai_0 R \zeta,$$

τ_{cor} が小さいときには、(155)の ζ を次のランダム波動によっておきかえることができる：

$$(156) \quad \zeta = e^{a\zeta} - \langle e^{a\zeta} \rangle,$$

そうすると、 $\hat{\zeta}$ をガウス-デルター相関なランダム過程とすると、ここで $\hat{\zeta}$ は平均値 0 で、相関関数は

$$(157) \quad \langle \hat{\zeta} \hat{\zeta}(\tau) \rangle = K \delta(\tau),$$

となる。この ζ の強度係数 (intensity coefficient) K はもとの変数 ζ の K と等しくえらぶ：

$$(158) \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \zeta \zeta(\tau) \rangle d\tau,$$

そこで、(155)で ζ を $\hat{\zeta}$ でおきかえると、(155)式はマルコフ過程を記述している。そして、それは、次の Fokker-Planck の方程式と等化である：

$$(159) \quad \dot{w} = \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial x} [x \log x - m] w + \frac{1}{2} \left(\frac{ai_0}{C} \right)^2 K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

ここで、 w は確率密度 w の時間微係数であり、

$$(160) \quad m = ai_0 R \langle e^{a\zeta} \rangle = ai_0 R e^{a^2 \sigma^2 / 2},$$

である。(159)式の非定常解を求めることは困難であるが、一次元の定常確率密度 $w(x)$ を求めることは容易に

出来る、すなわち：

$$(161) \quad w(x) = N^{-1} \exp \left\{ -\frac{RC}{(ai_0 R)^2 K} \left[x^2 \left(\log x - \frac{1}{2} \right) - 2mx \right] \right\},$$

ここで N は適当な規格化定数である。(161)の形は次の2つのパラメーターのみによって完全に決まってしまう：

$$(162) \quad m = ai_0 R e^{a^2 \sigma^2 / 2}, \text{ 及び } q = \frac{(ai_0 R)^2}{2RC} K,$$

この第1のパラメーター m は最大の確率をもつ座標を決定するパラメーターである： $x_0 \log x_0 = m$ を満足する定数である。又 q はバラツキによる分散を決める量である。よって、確率密度 $w(x)$ が $e^{\frac{1}{2}} \approx 0.61$ に落ち込む座標 x_1 と x_2 とは、次の方程式の根として求まる：

$$(163) \quad \begin{cases} f(x) - f(x_0) = q, \\ f(x) = x^2 \left(\log x - \frac{1}{2} \right) - 2mx, \end{cases}$$

(161) から、容易に出力の確率密度が求まる：

$$y = \frac{1}{a} \log x \text{ より,}$$

$$(164) \quad w(y) = \frac{a}{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2q} [e^{2ay} (ay - \frac{1}{2}) - 2me^{ay}] + ay \right\},$$

この式で、最大の確率密度をもつ場合の y_m の値は、次の方程式の根として計算される：

$$(165) \quad aye^{2ay} - me^{ay} - q = 0,$$

この式を級数展開して $y = y_m$ を取ると、

$$(166) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{2q} [e^{2ay} (ay - \frac{1}{2}) - 2me^{ay}] + ay \\ & = -\frac{1}{2q} [e^{2ay_m} (ay_m - \frac{1}{2}) - 2me^{ay_m}] + ay_m \\ & \quad - \frac{1}{2q} [e^{2ay_m} (2ay_m + 1) - me^{ay_m}] a^2 (y - y_m)^2 + \end{aligned}$$

最初の数項のみを取ると、最大確率の範囲内では、

$$(167) \quad w(y) \approx w(y_m) \exp \left\{ -\frac{(y - y_m)^2}{2\sigma^2 e^q} \right\},$$

を得る。ここで、

$$(168) \quad \begin{aligned} \sigma_{20}^2 & \equiv \frac{q}{a^2} [e^{2ay_m} (2ay_m + 1) - me^{ay_m}]^{-1} \\ & = \frac{q}{a^2} \left[q \left(q + \frac{1}{ay_m} \right) + me^{ay_m} \left(1 + \frac{1}{ay_m} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

は最大確率の範囲内で $w(y)$ に充分近い等化ガウス分布の分散である。

もし、分布 $w(y)$ が、正規分布からあまり異ならない場合には、量 y_m は平均値 $\langle y \rangle$ に近似的に等しく、等化分散 σ_q^2 は分散 Dy に近似的に等しい。もし、 $w(y)$ が正規分布に等しくない場合の平均値及び分散を求めたいならば、(164)を数値積分しなければならない。

次に、入力 $\xi(t)$ がガウスノイズのときには、

$$(169) \quad \begin{cases} \langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi(\tau) \rangle = \sigma^2 R(\tau), \\ K = 2e^{a^2 \sigma^2} \int_0^\infty [e^{2\sigma^2 R(\tau)} - 1] d\tau, \end{cases}$$

である。特別な場合として、 $R(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}$, $\gamma = \frac{1}{\tau_{cor}}$ のときには、変数変換：

$$(170) \quad z \equiv a^2 \sigma^2 e^{-\gamma\tau};$$

をほどこすと,

$$(169a) \quad K = \frac{2}{\gamma} e^{a^2 \sigma^2} \int_0^{a^2 \sigma^2} \frac{e^{z-1}}{z} dz = \\ = \frac{2}{\gamma} e^{a^2 \sigma^2} [E^*(a^2 \sigma^2) - 2 \log a \sigma - C],$$

となる. ここで, $E^*(z)$ は指数積分の一種であり, $C = 0.577 \dots$ はオイラー定数である. もし, (169) が直接に積分出来ない場合には, 次の式を用いると便利である:

$$(169b) \quad K = 2e^{a^2 \sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a\sigma)^{2n}}{n!} \int_0^{\infty} R^n(\tau) d\tau,$$

数値例: 今パラメータが,

$$(170) \quad a\sigma = 3, \quad a_i R = 10, \quad \gamma RC = \frac{RC}{\tau_{cor}} = 100,$$

と与えられたとすると,

$$(171) \quad \begin{cases} m = 898, & q = 8.25 \times 10^6, \\ ay_0 = 5.16, & ay_m = 6.1, & y_{\sigma eq} = 0.543, \end{cases}$$

又, もし, $a\sigma$, 及び $a_i R$ が小さく, 容量が10倍くらい, すなわち $\gamma RC = 1000$ とすると,

$$q = 8.25 \times 10^6, \quad ay_m = 6.1, \quad a_{\sigma eq} = 0.543,$$

となる.

上の数値的な結果を比較すると, 容量 C が増すにつれて, 負荷の電圧の平均値及びそのふらつきの分散が減少することがわかる. 又, 上のような特殊な形の相関関数をもつガウスノイズの場合にも, 出力電圧の平均値を示しているボルトメーターの読みは, たとえ入力雑音の分散 σ^2 が同一である場合でも, $te\tau_{cor}/RC$ の値が異なれば異なることがわかる. 従って, ノイズの分散をはかるためには, ふつう工学的に実用に供されている真空管を用いて作られたボルトメーターを用いることは, まちがいである. 真空管式ボルトメーターは, 単にノイズ強度の相対的な評価のため, 及びノイズのスペクトル構成が変らないノイズに対してのみ用いることが出来る. ノイズのバラツキの2乗平均値を測定するためには熱電対装置を用いるべきである.

7. あとがき

以上の外, 入力为正弦波でノイズを含んでいる場合の取扱い, 及びPCM等の如き, パルス通信における諸問題が非常に重要であるが, 今回はこれらは割愛させていただきます.

今後, 非直線素子のもつ重要性はますます増大するものと思われる. この論文が, この方面の将来の研究の参考となれば, 誠に幸いである.

最後に, 本学学長, 後藤鉦二氏並びに電子工学科竹松英夫教授に日頃の御援助を深謝する.