FACTORIAL SERIES の性質とその 2, 3 の応用

新 美 吉 彦　皆 福 正 彦

Properties of Factorial Series and its Applications

Yoshihiko NIIMI, Masahiko KAIFUKU

In this paper, we are devoted to develop the properties of Factorial series and its various applications, such as the problem of the error of approximated series expansions, the numerical solution of the transient phenomena in electrical communication networks, and the procedure in finding of the solution of linear defferential equations, etc.. Factorial series are the rapidly convergent series in ordinary analytic function, and therefore, it is very convenient in numerical work since a convergent process, in contrast to the representation by an asymptotic series, possesses unlimited accuracy. The study dealed in this paper will be practically become very important in the control engineering and the system engineering in the future.

1. 前　　　言

この論文は，Factorial series の 2, 3 の応用について述べたものである．我々が工学上，物理学上でよく相遇する問題は，大抵の場合微分方程式によって記述されることが多い．しかるに，その微分方程式の解はふつうの解析関数では現わされず，漸近級数でしか求められない場合が，大変多いのである．ところで，漸近級数：

(1. 1)　$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}$, $(x \to \infty)$

は，一般には，$x=\infty$ でのみ hofomorphic であるから x が有限の値では右辺は正確な表現とはなっていない．その上，実際に，我々が工学上，物理学上の問題で知りたいのは，$A(x)$ の，x がある範囲内 (a, b) での変化の様子である．このような場合に，解として求まった漸近級数を何にか他の収束級数に変換する問題が生ずる．そのうちの一つとして Factorial series を取り上げて見たのである．それらの級数の，可算性(summability)の問題がある．しかし，この summability は厳密な定義がこのような一般的な場合にあるわけではない．

級数を作るときに形式的な方法を用いると，一般にその結果得られた級数 $f(x)$ は発散する．問題は，この発散級数をある範囲内で，函数 $f(x)$ の値を必要とする確度で近似する収束数級で置き換えることである．

このような問題に決定的な一歩をふみだしたのは，J. Horn による：(1912年，1915年，1916年の収束 Factorial 級数に関する彼の論文)．Horn は，$A(\infty)$ の固有値はすべて互に異なっていると仮定した．さらに重複固有値の場合については，Trjitzinsky (1935) 及び Turrittin (1955) の論文がある．第1の論文は1個の方程式を取扱っており，第2の論文は方程式系を取扱っている．この論文では，最初に，Factorial series の 1，2の性質を述べ，しかし，必ずしも完全な証明を与えていない，次にその応用について，すなわち，線型微分方程式の解法への応用，ティラー級数展開における近似式の誤差の問題，電気回路の過渡解の数値解の求め方，及び分布定数線路の合成問題との関係について簡単に述べることにする．

2. Factorial series の性質，

はじめに，Factorial series の定義を述べる：

(2.1)定義：$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{x(x+1)\cdots(x+r)}$,

のことを Factorial series と呼んでいる．このような級数は微分方程式，又は，積分方程式等を差分近似する場合，即ちそのような場合には，積 $x(x+1)(x+2)\cdots(x+r)$ のようなものの逆数がしばしば現われる，によく用いられる．

Factorial series の他の発生源はラプラス変換論との関係である：今，$F(x)$ を次の形式のラプラス積分によって表現可能な関数であるとしょう．

(2. 2)　$F(x)=\int_0^{\infty} e^{-tx} f(t) dt$,

ここで積分は実軸に沿って行なわれている．今，もし，$f(t)$ が t のベキ級数で置き換えられたとする．それを項別積分すると，$F(x)$ は x^{-1} の級数になる．ところが，もし，今，(2. 2) の積分を，はじめに，$s=e^{-t}$ なる変数変換をしておくと，

(2. 3)　$F(x)=\int_0^1 s^{x-1} \phi(s)\ ds$,

ここで，

$$\phi(s)=f(\log\frac{1}{s}),$$

もし，$\phi(s)$ を $t=0$ すなわち $s=1$ で級数展開すると；

(2. 4) $$\phi(s)=\sum_{r=0}^{\infty} c_r(1-s)^r,$$

この（2.4）を（2.3）に代入して，項別積分を行なうと結果として，Factorial series が得られる：

(2. 5) $$F(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r!\ c_r}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+r)},$$

ここで，上述の変換が可能であるためには我々は次の3つの仮定を陰にしている：

(a) $F(x)$ はラプラス積分によって表わすことができる．

(d) $\phi(s)$ は $|1-s|<1$ において holomorphic である．

(c) （2.5）は（2.4）を (2.3) に，代入して後，項別積分することが許される．

以下では，我々は $F(x)$ は解析関数と仮定する．そしてそれはある半平面内で漸近級数展開をもつと仮定する．例えば，もし，その半平面が $R_e x\geq k$ なる形に書かれかつ，$F(+\infty)=0$ ならば，それはいつも回転及び定数を引くことによって可能である，条件(a)はつねに満足される：即わち，次の定理がなりたつ：[Nörlund (1926) による]

定理 1. もし，

(2. 5) $$F(x)=\frac{a_0}{x}+\frac{\mu(x)}{x^2},$$

ならば，ここで，$\mu(x)$ は holomorphic であり，かつ $R_e x\geq k$ に対して有界である，$F(x)$ はこの半平面内で，いつも次の形に書くことができる．

(2. 6) $$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}\cdot f(t)dt,$$ （証明略），

定理 2.（Factorial series に関する基本定理）．今 $F(x)$ は次の条件を満足しているとしょう：

(2. 7) $$F(x)=\frac{a_0}{x}+\frac{\mu(x)}{x^2},$$

ここで $\mu(x)$ は $R_e x\geq k>0$ で，holomorphic かつ有界であるとする；

（2.8） 次の式によって定義される関数 $f(t)$：

(2. 9) $$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}\cdot f(t)dt,$$

は，非負の軸を含んだ半無限平面 strip 内で holomorphic である．

(2.10) $$\lim_{t\to+\infty}e^{-kt}f(t)=0,$$

この strip 内で．

そうすると，ある正の定数 $\omega_0\geqq 1$ があって，

$\omega>\omega_0$，かつ $R_e x\geq k$

なる ω, x に対して，函数 $F(x)$ は次の形式の絶対かつ，一様に収束する展開級数をもつ．

$$F(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a_r}{x/\omega[(x/\omega)+1]\cdots[(x/\omega)+r]},$$

条件（2.7）（2.9）（2.10）はこの展開が存在する為の必要条件である．

定理 3. 収束する Factorial sereis に展開可能な函数は，右半平面内で x が無限大に近づくとき x^{-1} の巾級数で漸近的に表わすことができる．

証明：明らかに，

(2. 11) $$\frac{1}{x+r}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-r)^s}{x^{s+1}},\quad \text{for}\,|x|>r,$$

この収束級数は，$1/(x+r)$ の漸近的表現である．更に一般に，Factorial series の n 項のすべての部分和は漸近級数をもつ．もし，$|x|\geq R$ なるある領域内で有界であるよな漸近表示を，残余の項に対してほしい場合には，ここで R は n に独立である，この領域は負の実軸を含んでいなければならない．もし，$F(x)$の Factorial 級数が収束するならば，そのときには，

(2. 12) $$\begin{aligned}F(x)&=\sum_{r=0}^{n}\frac{a_r}{x(x+1)\cdots(x+r)}\\&+\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{a_r}{x(x+1)\cdots(x+r)}\\&=\sum_{r=0}^{m}\frac{b_r}{x^{r+1}}+E_{mn}(x)x^{-m-2}\\&+E_n(x)x^{-n-2},\end{aligned}$$

ここで，$E_{mn}(x)$ は，m と n が固定されているときには，すべての $|x|\geq R$，$|\arg x|\leq\pi-\delta$, $\delta\geq 0$ に対して有界である．他方において，もし λ が Factorial series の収束する軸であるならば，与えられた n に対して，すべての半平面内 $R_e x\leq\lambda+\varepsilon$ において有界である．

m 及び n は任意に大きくえらぶことができるから，（2.12）は定理を証明したことになる．（証明終）

次に，漸近級数と factorical series との間の相互変換公式を求めよう．先づ，

(2. 13) $$x^{-p}=\int_0^{\infty}e^{-tx}\cdot\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}dt,$$

なる公式が成立することに注意しょう．この式で $t=\log 1/s$ なる変換をすると，

(2. 14) $$\phi(s)=\frac{1}{\Gamma(p)}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{p-1},$$

さて，この式を $1-s$ のベキ級数に展開するのであるが，それを次のようにする．先づ，$G(\log s)$ を $\log s$ の解析函数であるとしょう．すなわち，

(2. 15) $$\frac{d^n}{ds^n}G(\log s)=s^{-n}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\Gamma_{\nu}{}^{n}G^{(n-\nu)}(\log s),$$
$n\geq 1$,

ここで，$\Gamma_{\nu}{}^{n}$ はある定数で，すべての函数 $G(z)$ に対して同じである．今，それを求めるために，$G(z)=e^{-cz}$

としょう．そうすると，$G(\log s)=s^{-c}$ で，かつ

$$\frac{d^n}{ds^n}G(\log s)=(-1)^n c(c+1)\cdots(c+n-1)s^{-c-n},$$

$$G^{(k)}(\log s)=(-1)^k\ c^k s^{-c},$$

従って，(2.15) は，この函数に対しては次のようになる：

$$c(c+1)\cdots(c+n-1)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\Gamma_\nu{}^n c^{n-\nu},$$

左辺の積を実際に行なって，右辺と比較すると

(2. 16) $$\overset{n}{\Gamma}_0=1,$$

$$\overset{n}{\Gamma}_\nu=\sum_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu=1\\ \alpha_1<\cdots<\alpha_\nu}}^{n-1}\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_\nu,\quad \nu>0.$$

となる．上式を別の言い方をすると，$\overset{n}{\Gamma}_\nu$ を求めるためには，先づ，1, 2,⋯, $n-1$ なる $n-1$ 個の整数から1度に ν 個とりそのすべての組合せ（繰返すことなしに）を作ってそれから，夫々の組合せの数を掛け合せ，そしてそれらの積を加えることによって得られる．もし，$S_\nu(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ を $n-1$ 個のν次変数の初等代数的な対称関数とすれば，$\overset{n}{\Gamma}_\nu=S_\nu(1,\ 2,\cdots,\ n-1)$ である．これらの数はふつう Factorial 係数又は Stirling の数と呼ばれている．

表 — 1 $\Gamma\nu^n$ の値.

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	1	1								
3	1	3	2							
4	1	6	11	6						
5	1	10	35	50	24					
6	1	15	85	225	274	120				
7	1	21	175	735	1534	1764	720			
8	1	28	322	1960	5944	11662	13068	5040		
9	1	36	546	4536	18264	51534	99084	109584	40320	
10	1	45	870	9450	47748	177030	489180	934812	1026576	362880

さて，(2.14) の計算に (2.15) を用いると，$p>1$ のとき，次式が導かれる：

(2.17) $$\phi^{(r)}(1)=\begin{cases}0, & r<p-1\ のとき,\\ (-1)^r\,\overset{r}{\Gamma}_{r-p+1}, & r\geq p-1 のとき,\end{cases}$$

従って，公式 (2.4)，(2.5) から

(2.18) $$x^{-p}=\sum_{r=p-1}^{\infty}\frac{\overset{r}{\Gamma}_{r-p+1}}{x(x+1)\cdots(x+r)},\quad p>1$$

が得られる．さらに，

(2.19) $$F(x)\sim\sum_{p=1}^{\infty}\frac{c_p}{x^p},$$

を factorial series に変えるには，(2.18) を (2.19) に代入して得られる2重級数を整とんすればよい．

(2.20)

$$F(x)=\frac{c_1}{x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_2\overset{r}{\Gamma}_{r-1}+c_3\overset{r}{\Gamma}_{r-2}+\cdots+c_{r+1}\overset{r}{\Gamma}_0}{x(x+1)\cdots(x+r)},$$

定理 4. もし，$F_1(x)$ と $F_2(x)$ が $R_e x>k$ に対し，収束する factorial series をもてば，

$$[c_1+F_1(x)][c_2+F_2(x)]-c_1c_2\quad (c_1,c_2 は定数)$$

も，同じ半平面内で収束する Factorial series をもつ，〔Nörlund (1926) による〕．

3. Factorial series の応用；その1. 級数の数値解えの応用，

我々が工学上，物理上よく用いる特殊函数はすべてティラー級数展開可能な函数である．例えば $\log x$ 又は $\cos x$ は，解析函数であり，一方それは線型微分方程式：

(3. 1) $$d^2y/dx^2+y=0,$$

なる微分方程式の解でもある，一般に，線型方程式：

(3. 2) $$a_n(x)\cdot y^{(n)}+\cdots++a_0(x)=0$$

で，その係数 $a_n(x),\cdots,\ a_0(x)$ が特異点を持つとしても高々孤立特異点しか持たないならば，その解 $y(x)$ はその特異点の近傍において漸近級数で表現可能である．（これは微分方程式の解は係数が holomoriphic な点では一意でかつ holomoriphic であるという基本定理からの当然の結果である）．

従って，その解を Factorial series で表現することも又可能である．何故なら，ティラー展開において x の代りに $x=1/t$ とおけば t については漸近級数になるからである．

具体例 1. 対数函数 $\log(1+x)$

(3. 8)　$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots,$

で表わされる．これは $|x|\leqq 1,\ x\neq -1$ の場合には収束級数となっている．この級数の Factorial series による表現式は，

(3. 9)　$\log\left(\frac{t+1}{t}\right)=\frac{1}{t}+$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{-\Gamma_{r-1}^{r}/2+\Gamma_{r-2}^{r}/3+\cdots+(-1)^{r+1}\Gamma_{0}^{r}/(r+1)}{t(t+1)\cdots(t+r)}$$

となる．3 項近似は，

(3. 9a)　$\log\left(\frac{t+1}{t}\right)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t(t+1)}+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{t(t+1)(t+2)},$

となる。

そこで，$x=0.5$ とすると，

(3. 8)　による：$\log(1.5)=0.5-\frac{1}{2}\times0.25=0.375,$

$(x=0.5)$

(3. 9a)　による：$\log(1.5)=0.5-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2\times3}=0.4167,$

$(t=2)$

真の値は $\log_e 1.5=0.4055\cdots$ である．明らかに Factorial series による方が単なる級数展開による方よりより真値に近い．さらに，$x=1.5$ の場合：

(3. 8)　による：$\log(2.5)=1.5-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2=0.335,$

(3. 9a)　による　$\log(2.5)=(1.5)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}+1\right)}$

$=1.5$

つまり，真値，$\log(2.5)=0.9163$ には両方の値がほど遠いが，しかし，Factorial series にする方がずっと近似がよい．すなわち，Factorial series による方法は級数の収束範囲外でも或る程度近似式として使用にたえ得るということが出来ると思う．

第 2 図　$\log(x+1)$ の近似値の比較—：巾級数による；～：Factorialseries による；

x	$(\log_e x+1)$	第 1 近似		第 2 近似		第 3 近似		第 4 近似		第 5 近似	
		$\overline{\log x+1}$	$\widetilde{\log x+1}$	$\overline{\log x+1}$	$\widetilde{\log x+1}$	$\overline{\log x+1}$	$\widetilde{\log x+1}$	$\overline{\log x+1}$	$\widetilde{\log x+1}$	$\overline{\log x+1}$	$\widetilde{\log x+1}$
0.5	0.40546	0.5	0.5	0.375	0.41666	0.45833	0.40972	0.39583	0.40763	0.44583	0.40675
1.0	0.69314	1.0	1.0	0.5	0.75	0.83333	0.72222	0.58333	0.71180	0.78333	0.70652
1.5	0.91629	1.5	1.5	0.375	1.0499	1.125	0.99374	0.56250	0.97073	1.0125	0.95824
2.0	1.09860	2.0	2.0	0	1.3333	1.33333	1.2444	0.33333	1.2063	1.1333	1.1849
2.5	1.25270	2.5	2.5	0.625	1.6071	1.4583	1.4831	0.10416	1.4284	1.1458	1.3969
3.0	1.3862	3.0	3.0	1.5	1.8750	1.5	1.7142	0.75	1.6419	1.05	1.5996
3.5	1.5040	3.5	3.5	2.625	2.1388	1.4583	1.9403	1.6041	1.8497	0.84583	1.7962
4.0	1.6094	4.0	4.0	4.	2.4	1.3333	2.1629	2.6666	2.0535	0.53333	1.9883
4.5	1.7047	4.5	4.5	5.625	2.6590	1.125	2.3829	3.9375	2.2544	0.1125	2.1772
5.0	1.7917	5.0	5.0	7.5	2.9166	0.8333	2.6010	5.4166	2.4530	0.41666	2.3637

以上の外に，Factorial series の真の有用性を発揮する場合として，特異点の近傍における函数の値を計算する問題があるが，これは少し長すぎるので，今回の報告では省略させていただいた．

4. factorial series の応用；その 2. Rank 1 の微分方程式の解法，

4. 1. 順備．

ふつう孤立特異点をもった微分方程式系は，マトリックス形式で次のように表現される．

(4. 1)　$z^h\cdot\frac{dY}{dz}=B(z)\cdot Y,$

ここで h は正の整数，Y は $n\times n$ のマトリックス，$B(z)$ は $z=0$ で holomorphic な matrix であるとする．

今もし，$h>1$ のとき $x=1/z$ なる変換変換を行なうと，（4．1）式は

(4. 2)　$x^{-q}\ \frac{dY}{dx}=A(x)Y,$

となる．ここで，$q=h-2,\ A(x)=-B(1/z)$．整数 $q+1$ のことを特異点の rank という，すなはち rank 1 の特異点とは（4．1）で $h=2$ の特異点のことである．これは非常に特別な場合で特異点を原点にもつ方程式であるが factorial series の応用としての具体例として取り上げてみた．すなわち方程式としては，

(4. 2)　$Y'=A(x)Y,$

を問題にしょう．ここで，

(4. 3)　$A(x)=\sum_{r=0}^{\infty}A_r x^{-r},$

とする．ただし，ここでは，matrix A_0 のすべての固有値 λ_j が異なる場合だけを考えることにする．

この方程式は，$x=0$ を通る任意の開半平面内で次の形の基本 matrix 解をもつ：

(4. 4)　$Y(x)=\hat{Y}(x)x^{D}e^{\Lambda},$

ここで，

(4. 5)　$\Lambda=diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdot\cdot, \lambda_n)$,

Dは対角行列であり，かつ

(4. 6)　$\hat{Y}(x)\sim\sum_{r=0}^{\infty}\hat{Y}_r x^{-r}$,　$x\to\infty$

である．

ここで示そうとすることは，matrix $\hat{Y}(x)-\hat{Y}_0$ が収束 Factorial series によって表現され得るということである．

そこで，２つの簡単な変換から始める：

先づ，回転：

(4. 7)　$x^*=xe^{-i\alpha}$

を，適当な角度 α で行なって，sector S を正の実軸によって２等分される sector に変換することができる．ここでは，sector S はすでにこの位置にあるものと仮定する．

次に，形式的な主対角化の手続を有限の項だけに限って行なうとすれば：すなわち，変換級数

$$\sum_{r=0}^{\infty}P_r x^{-r}$$

を，

$$\sum_{r=0}^{N}P_r x^{-r},$$

で置き換えると，ここで N は任意とする，その変換：

$$Y=(\sum_{r=0}^{N}P_r x^{-r})z$$

によって，もとの（４．２）の方程式は，係数のはじめのN項の係数 matrix が対角化された形に変換される．変換後の $\hat{Y}(x)$ に対応する matrix を $\hat{Y}^*(x)$ と仮定し，$\hat{Y}^*(x)-\hat{Y}_0{}^*$ も又，収束 Factorial series をもつと仮定しょう．

従って，一般性を失うことなしに，

(4. 8)　$A_0, A_1, \cdot\cdot A_N$ は対角行列である

と仮定することができる．rank 1 の方程式の場合には $N=2$ とするとよい．

又，

(4. 9)　$A_0=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdot\cdot, \lambda_n)$

としてよいから，問題は．

(4.10)　$U(x)=\hat{Y}(x)-\hat{Y}_0$,

なる函数が定理２の３つの条件を満たすことを示せばよい．（証明省略）

そこで，条件（２．８）．（２．９）が成立することを示すために，次のようにもとの微分方程式に対応する積分方程式を導かう．先づ，(４.10)の matrix $U(x)$ のみたす微分方程式を導く：

(4.11)　$A(x)=A_0+A_1x^{-1}+\tilde{A}(x)$,

とおいて，微分方程式に代入すると，

$$(U(x)+\hat{Y}_0)e^{A_0x+A_1\log x},$$

となる，さらに

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}\hat{Y}_r x^{-r}\right)e^{A_0x+A_1\log x}$$

が微分方程式の形式的な解であることに注意すると，$U(x)$ に対する微分方程式は，

(4.12)　$U'=(A_0U-UA_0)+(A_1U-UA_1)x^{-1}$
$\quad+\tilde{A}(x)\hat{Y}_0+\tilde{A}(x)U$

となる．定理２の（２．８），（２．９）は$U(x)$ の逆ラプラス変換に関係している．すなわち $u(t)$ の存在：

(4.13)　$U(x)=\int_0^{\infty}e^{-tx}u(t)dt$,

を定理１の条件 (1) は意味する．更に $\tilde{A}(x)$ は $x\to+\infty$ のとき $O(x^{-2})$ であり，かつ，$x=\infty$ で holomorphic であるから：

(4.14)　$\tilde{A}(x)=\int_0^{\infty}e^{-tx}\tilde{a}(t)dt$,

と書くことができる．ここで$\tilde{a}(t)$は指数函数型で，$t=0$ では０である：

(4.15)　$\tilde{a}(0)=0$,

従って，(４.12) の微分方程式にラプラス変換をほどこすことができる．結果として，

(4.15)　$-tu(t)=A_0u(t)-u(t)A_0$
$\quad+\int_0^t(A_1u(\tau)-u(\tau)A_1)d\tau+$
$\quad+\tilde{a}(t)\hat{Y}_0+\int_0^t\tilde{a}(t-\tau)u(\tau)d\tau$,

を得る．この積分方程式の構造を明らかにするために n^2 個の要素を，$v_j(t)$, $j=1, 2,\cdot\cdot, n^2$ によって記すことにする．この順序は $u(t)$ の n 個の主対角が最初に来るようにする．そうすると積分は次の形をもつ：

(4.16)　$(\mu_j-t)v_j(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{n^2}g_{jk}(t-\tau)v_k(\tau)d\tau$
$\quad+h_j(t)$,　$j=1,\cdot\cdot, n^2$.

μ_j は A_0 の固有値 λ_ν の差 $\lambda_\nu-\lambda_\mu$, $\mu, \nu=1,\cdot\cdot, n$ である．従って，

(4.17)　$\mu_j=\begin{cases}=0, & j=1,\cdot\cdot, n,\\ \neq 0, & j=n+1,\cdot\cdot, n^2.\end{cases}$

（４.16）の最初のn個の方程式は特異点を $t=0$ に持っている．matrix $A_1u(t)-u(t)A_1$ の主対角要素は恒等的に０であることを考えると，

(4.18)　$g_{jk}=tg_{jk}{}^*(t)$,　$j=1, 2,\cdot\cdot, n$,
$\quad k=1, \cdots, n^2$,

なることがわかる．

４．２．積分方程式の解

今，B を，$\tau=0$ の無限 sector$|\arg\tau|\leq\theta<\pi/2$の周囲に固定された円環での union からなる τ- 平面の閉領域であるとしょう．虚軸は我々の微分方程式の分離直線の中には含まれていないという仮定に注意すると，$R_e[(\lambda_\nu-\lambda_\mu)x]$; $\nu\neq\mu$ は純虚数 x に対して０とはならないことと，非零の差，$\lambda_\nu-\lambda_\mu$ は実ではないことと等化である．これら $\lambda_\nu-\lambda_\mu$ は積分方程式 (4.16) の μ_j の非負の値である．従って，もし θ 及び $\tau=0$ の周りの円の半径が充分に小さいならば，領域 B は点 $\mu_j, j>n$ か

ら正の距離にあることになる.

すべての函数 h_j, g_{jk}, h_j^*, g_{jk}^* は指数函数型であるから, 又, Bの無限部分は右半平面内にあるから, 正の数 ρ が存在して, 函数

(4.19) $\tilde{h}_j(t)=e^{-\rho t}\cdot h_j(t)$, $\tilde{g}_{jk}(t)=e^{-\rho t}g_{jk}(t)$,

$\tilde{h}_j^*(t)=e^{-\rho t}\cdot h_j^*(t)$, $\tilde{g}_{jk}^*(t)=e^{-\rho t}g_{jk}^*(t)$,

はB内で有界である. このことは, 積分方程式に新しい変換:

(4.20) $\tilde{v}_j(t)=e^{-\rho t}v_j(t)$

を導入することが出来ることを意味する. そしてこれにより積分方程式 (4.16) は, 次のようになる:

(4.21) $(\mu_j-t)\tilde{v}_j(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{n^2}\tilde{g}_{jk}(t-\tau)\tilde{v}_k(\tau d\tau$

$+\tilde{h}_j(t)$,

次に, 次の再生公式によって函数列 $v_j^r(t)$, $r=0,\cdot\cdot$, を定義する.

(4.22) $(\mu_j-t)\tilde{v}_j^{(r+1)}(t)$

$=\int_0^t\sum_{k=1}^{n^2}\tilde{g}_{jk}(t-\tau)\tilde{v}_k^{(r)}(\tau)d\tau+\tilde{h}_j(t)$,

と, 0次函数:

(4.21) $\tilde{v}_j^{(0)}(t)=0$

によって, そこで, その差,

(4.22) $\tilde{w}_j^{(r+1)}=\tilde{v}_j^{(r+1)}-\tilde{v}_j^{(r)}$

の再生公式を作る:

(4.23) $(\mu_j-t)\tilde{w}_j^{(r+1)}(t)$

$=\int_0^t\sum_{k=1}^{2n}\tilde{g}_{jk}(t-\tau)\tilde{w}_k^{(r)}(\tau)d\tau$,

と, 次の関係式

(4.24) $\tilde{w}_j^{(1)}(t)/(\mu_j-t)$,

によって.

今, Kを, 量, $|\tilde{h}_j|$, $|\tilde{h}_j^*|$, $|\tilde{g}_{jk}|$, $|\tilde{g}_{jk}^*|$, のB内での共通の上界としよう. もとの積分公式 (4.16) と関係式 $\tilde{h}_j(t)=t\tilde{h}_j^*(t)$ を考慮すると, (4.24) の式は次のことを意味する:

$|\tilde{w}_j^{(1)}(t)|\leq K\delta$, $j=1,\cdot\cdot, n^2$,

ここで, δはBから集合 $\{\mu_j\}$, $j=n+1,\cdot\cdot, n^2$ 迄の距離をこえないある正の数である. 又, $w_j^{(1)}(t)$ は B 内で holomorphic である. そこで, 帰納法によって, 一般に $\tilde{w}^{(r)}(t)$ は B 内で holomophic であり, かつ,

(4.25) $|\tilde{w}_j^{(\nu)}(t)|\leq\left(\frac{K}{\delta}\right)^\nu\cdot\frac{m^{\nu-1}|t|^{\nu-1}}{(r-1)!}$, t は B

内で, であることを示そう. ここで簡単のために,

$n^2\equiv m$,

とした.

今, $\nu\leq r$に対してはこのことは証明されたと仮定する. そうすると, (4.23) の右辺はB内で holomorphic であり, かつ, $t=0$ で 0 となる. 従って, $w_j^{(r+1)}(t)$ はすべての j に対して, そこでは holomorphic である.

(4.25) を (4.23) に代入すると, $j\leq n$ のとき

$|t||\tilde{w}_j^{(r+1)}(t)|\leq\left(\frac{K}{\delta}\right)^r\frac{m^{r-1}}{(r-1)!}\int_0^{|t|}mK$

$(|t|-|\tau|)|\tau|^{r-1}d|\tau|$,

ここで, 関係式 (4.18) を用い, 積分路を有限にとった. 簡単な計算の結果

$|\tilde{w}_j^{(r+1)}(t)|\leq\frac{K^{r+1}}{\delta^r}\cdot\frac{m^r|t|^r}{r!}$, $j\leq n$, $t\,\mathrm{in}\,B$,

となる. この式の右辺は, $\nu=r+1$ のとき, (4.25) の右辺より小さい. $j>n$ のときは, 全く同様にして,

$|\mu_j-t||\tilde{w}_j^{(r+1)}(t)|\leq\left(\frac{K}{\delta}\right)^r\frac{m^{r-1}}{(r-1)!}$

$\int_0^{|t|}mK|\tau|^{r-1}d|\tau|$,

を得る, 結局, 積分方程式 (4.21) は一意な解をもち, かつ, 次の不等式を満足することがわかる.

$|\tilde{v}_j(t)|\leq\frac{K}{\delta}e^{km|t|/\delta}$,

次に函数 $v_j(t)$ にもどして, (4.19) を用いると B 内では, 次の不等式が満足されることがわかる:

(4.26) $|v_j(t)|\leq\frac{K}{\delta}exp\left[\left(\frac{K}{\delta}m+p\right)\cdot|t|\right]$,

すなわち, 定理 2. の条件をすべて証明したことになる. これを定理の形にまとめると,

定理 5. 今, 次の形式の微分方程式が与えられたとしょう.

$Y'=A(x)\cdot Y$

ここで, $A(x)$ は無限遠点で holomorphic であるとする. $A(\infty)$ の固有値 λ_j, $j=1, \dot{n}\cdot\cdot, n$ はすべて異なると仮定する. 今, α は次の式を満たす任意の角とする:

$\alpha=-arg(\lambda_\nu-\lambda_\mu)$, ν, $\mu=1,\cdot\cdot, n$, $\nu\neq n$,

そうすると, 複素定数 $\rho_1,\cdot\cdot,\rho_n$ 及び正の数 $\omega_0\geq1$, K が存在して, $\omega\geq\omega_0$ に対して, 微分方程式は半面内:

(4.27) $R_e(xe^{-i\alpha})>K$,

で, 解 $Y(x)=\{y_{jk}(x)\}$ をもちかつその形は:

$y_{jk}(x)=exp(\lambda_kx+\rho_k\log x)\times$

$\times\Bigg\{y_{0,jk}+$

$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_{r,jk}}{(xe^{-i\alpha}/\omega)[(xe^{-i\alpha}/\omega)+1]\cdot\cdot[(xe^{-i\alpha}/\omega)+r]}\Bigg\}$,

である. この級数は, (4.27) の半平面内で収束する. 又 matrix $\hat{Y}_0=\{y_{0,jk}\}$ は非特異である.

5. Rank 1 の結果の一般の場合への拡張,

4. で得られた結論はさらに Rank の高い場合, すなわち微分方程式が次の式で表わされる場合にも拡張できる:

(5.1) $x^{-q}\cdot dY/dx=A(x)Y$

ここで,

(5.2) $q>0$

とする．しかしここでは，たんに次の結果を述べるだけにする．〔Turrittin (1963) による〕．

定理 6. すべての線型ベクトル微分方程式系：

(5.3)　$x^{-q}dy/dx=A(x)y$

ここで，rank $q+1$ で，かつ，係数 matrix $A(x)$ は $x=\infty$ で holomorphic で次元 n とする，は，rank 1 で，$n(q+1)$ 次元の次の系に対応する：

(5. 4)　$du/dt=M(t)u,$

ここで，係数 matrix $M(t)$ は $t=\infty$ で holomorphic で，かつ次の性質をもつ：もし $u(t)$ を（5．4）の解として u の最初の n 成分によってつくられた次元 n のベクトルとし，それを，$u^{(0)}$ と記し，次の n 成分によって形成された n 次元のベクトルを $u^{(1)}$ と記する，等々として，それを $u^{(q)}$ 迄続けてゆく．そうすると，

(5. 5)　$y=\sum_{j=0}^{q}x^{-j}u^{(j)}(x^{q+1}),$

は（5．3）の解であり，かつ（5．3）のすべての解は（5．5）の形式に表わされる．

定理 7. 次の形の matrix 微分方程式が与えられているとする：

(5. 6)　$x^{-q}Y'=A(x)Y,\quad q\geq 0,$

ここで，$A(x)$ は，無限遠点で holomorphic である．A_0 の固有値 λ_j, $j=1,\cdot\cdot,n$ はすべて異なると仮定する．今 α を任意の角度として，

$$\alpha\neq-\arg(\lambda_\nu-\lambda_\mu),\quad \nu,\mu=1,\cdot\cdot,n,\quad \nu\neq\mu,$$

としよう．そるすると正数 $\omega_0\geq 1$ と，K があって，$\omega\geq\omega_0$ に対して，与えられた微分方程式は，次のすべての単連絡領域内において：

$$R_e(x^{q+1}e^{-i\alpha})>K,$$

matrix 形式の解 $Y(x)=\{y_{jk}(x)\}$ をもつ，ここに $y_{jk}(x)$ は：

$$y_{jk}(x)=e^{p_k(x)}\Big[\sum_{s=0}^{q}x^{-s}\Big\{y_{s,jk}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_{sr,jk}}{(x^{q+1}e^{-i\alpha}/\omega)[(x^{q+1}e^{-i\alpha}/\omega)+1]\cdot\cdot[(x^{q+1}e^{-i\alpha}/\omega)+r]}\Big\}\Big]$$

又，

$$p_k(x)=\frac{\lambda_k}{q+1}x^{q+1}+a_{k,1}x^q+\cdot\cdot+a_{k,q}x+a_{k,q+1}\log x,$$

である．$a_{k\nu}$, $\nu=1$, $\cdot\cdot$, $q+1$, $k=1$, $\cdot\cdot$, n は複素定数である．又 matrix $\hat{Y}_0=\{y_{0,jk}\}$ は非特異である．〔Turrittin (1955) による〕

6. 電気回路の過渡解の数値解への応用，

6. 1. 今度は，実際の工学上の問題として，電気回路を考えよう．回路問題を考える場合，色々な立場があるが，ここではポート理論という見方から受動線型ポートだけに話を限って考えることにする．さらに，現在迄の回路網理論では，過渡現象と定常現象とを別々に考えるのがふつうになっている．しかし．今日のパルス回路の発達及びそれの応用としての，通信方式，情報工学，制御工学への適用等を問題にする場合には必然的に過渡解と定常解を同時に問題にすることが必要である．その点この論文の如き研究も意味があると思う．

n ポートでは，ふつう回路はインピーダンス行列又はアドミッタンス行列で表わされる：

(6. 1)　$Z\cdot I=V$，又は　$Y\cdot V=I$

ここで，I 及び V は $n\times n$ matrix である．Z 又は Y は複素周波数 $p=(j\omega+\sigma)$ の函数である．ここで回路網の問題として必要なことを定式化してみると次の3つになると思われる：

問題 1. インピーダンス行列 Z 又はアドミッタンス行列 Y が与えられているとして，n 個のポートのうち任意の r 個に任意時間函数の電源，電圧源又は電流源をつなぎ，残りの $n-r$ 個のポートに適当な1ポート（2端子網インピーダンス）を接続したとする．そのとき $n-r$ 個のポートの電圧又は電流を時間の函数として求めること．

問題 2. n ポートのうち任意の r ポートに適当な1ポート負荷を接続した場合．その負荷に流れる電流又は電圧を時間の函数として与えた場合，そのような状態になるために必要な残りの $n-r$ ポートに接続する電源を時間の函数として与えること．

問題 3. 今度は，電源も負荷も時間函数として与えられている場合．そのようなレスポンスを与えるのに必要なインピーダンス行列，又はアドミッタンス行列を複素周波数の函数として求めること．

このような問題は，制御工学をはじめとする情報工学，オートマトン等が発達するにつれて，ますますその必要性を増してくるものと思われる．ここでは，このうち，問題 1. に限って考えることにする．その他の問題も重要度においては決して劣らないが，今回の報告では割愛させていただく．

6. 2. 前節問題1の解法，

一般に（6．1）式において Z，あるいは Y が p の函数として与えられた場合の問題は，matrix Z の性質が先づ問題になる．しかし，ここではそれを論じないことにする．そしてここでは1ポート問題　すなわち，2端子インピーダンス $Z(p)$ が p の函数として与えられている場合，任意の電源，例えば電圧源 $u(t)$ が時間の函数として与えられた場合の電流の過渡解を求める問題を考える：

この場合，電圧源は，（6．1）式で $V(p)$ と考えてよい：

(6. 2)　$V(p)=\int_0^\infty e^{-pt}u(t)dt,$

又，フーリエ積分：

(6. 3)　$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p}=\begin{cases}+1, & \text{for } t>0,\\ 0, & \text{for } t<0,\end{cases}$$

なる性質がある．ここで積分は複素周波数平面 p を虚軸に沿って，虚軸から距離 c のところを走るものとする．

従って，上述の2端子に $t=0$ において，単位段函数電圧が印加された場合には，それを

(6. 4)　$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p},$$

と表わすことができる．故にインピーダンス $Z(p)$ の1ポートにこの単位ステップ電圧が印加されたときにその回路に流れる過渡電流は，

(6. 5)　$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{pz(p)},$$

と書かれる．

今もし，$z(p)$ が互いに相異なる零点 p_ν のみしかもたないときには，この積分は計算することが出来て，次のように書かれる：

(6. 6)　$$h(t)=\frac{1}{z(0)}+\sum_\nu\frac{e^{p_\nu t}}{p_\nu z'(p_\nu)},$$

ここで，“ , ”は微係数を意味し，かつ和は方程式 $z(p)=0$ のすべての根にわたって取るものとする．

任意の時間函数の電圧 $u(t)$ が印加された場合の電流 $i(t)$ は，この $h(t)$ を用いて次のように書くことができる．

(6. 7)　$$i(t)=u(0)h(t)+\int_0^t h(t-\tau)\cdot\frac{du(\tau)}{d\tau}d\tau,$$

よって，(6.5)，(6.6)，(6.7) から，回路のインピーダンス $z(p)$，電圧の時間的変化 $u(t)$ が与えられれば，電流の時間的変化が求まることになる．

具体例 1. 単位ステップ函数電圧印加の場合．この場合には，(6.6) からただちに

(6. 8)　$$i(t)=h(t)=\frac{1}{z(0)}+\sum_\nu\frac{e^{p_\nu t}}{p_\nu z'(p_\nu)},$$

と書かれる．例えば，$z(p)$ が，簡単に

(6. 9)　$$z(p)=(p-p_1)\cdots(p-p_n),$$

と表わされている場合には，

(6.10)　$$z'(p)=z(p)\cdot\sum_\nu\frac{1}{p-p_\nu},$$
$$=\sum_\nu \tilde{z}_\nu(p),$$

ここで，

$$\tilde{z}_\nu(p)=(p-p_1)\cdots\overbrace{(p-p_\nu)}\cdots(p-p_n),$$

である．$\overbrace{(p-p_\nu)}$ は $p-p_\nu$ だけ除く，の意味である．

よって，

(6.11)　$$z'(p_\nu)=\tilde{z}_\nu(p_\nu)$$

であるから，

(6.8a)　$$i(t)=\frac{1}{z(0)}+\sum_\nu\frac{e^{p_\nu t}}{p_\nu\tilde{z}_\nu(p_\nu)},$$

このような時間の函数を式だけからその変化を予想することは勿論不可能である．しかし又計算によって求めるとしても，一般にはあまり正確な結果は得られないであろう．そこで，考えられることは，収束の非常に速い級数で近似し，その2，3項で大体の様子を知ろうとすることである．それをここでは Factorial series の応用によって行なう．先づ

(6.12)　$$e^{p_\nu t}=\sum_{n=0}^\infty\frac{p_\nu{}^n}{n!}t^n,$$

を用いると．

(6.8b)　$$i(t)=\frac{1}{z(0)}+\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_\nu\frac{p_\nu{}^{n-1}}{\tilde{z}_\nu(p_\nu)}\right)\frac{t^n}{n!},$$

従って，Factorial series を用いて展開すると，

(6.8c)　$$i(t)=\frac{1}{z(0)}+\left(\sum_\nu\frac{1}{p_\nu\tilde{z}_\nu(p_\nu)}\right)$$
$$+\sum_{r=1}^\infty\frac{c_2\Gamma_{r-1}^r+c_3\Gamma_{r-1}^r+\cdots+c_{r+1}\Gamma_0{}^r}{{}^2x(x+1)\cdots(x+r)}$$

ただし，ここで，

(6.13)　$$c_r=\left(\sum_\nu\frac{p_\nu{}^{r-1}}{\tilde{z}_\nu(p_\nu)}\right)\frac{1}{r!},\ (x\equiv 1/t,)$$

とした．このようにして (6.8c) の2，3項迄で求めた結果は近似値としてはもとの指数函数よりも悪くなる場合もあり得るが，一般に理論的には当然，正確な値に非常に近いものとなる．特に t が $\to\infty$ に近づいたときには，(6.8b) の近似に比較して，充分よい近似を与えることがわかった．

7. 結　言

分布定数回路合成問題との関係については，次回以後に述べさせていただくことにして，今回は省略させていただいた．以上で，本論文を終らさせていただくが，この論文は，Factorial series 及び一般に，収束の早い級数で，発散級数展開，漸近級数展開を変換する問題，並びに，それによって工学上，物理学上によく相遇する徴分方程式の解の様相を位相的，数値的にはあくする問題，の研究の第1報として役立つものである．今後もこの方面の研究を更に深く，広く進めてゆきたいと思っている．終りに，本学後藤鉀二学長，並びに副学長安井勲氏電子工学科竹松英夫教授に，この研究完成にあたって，色々な意味で御援助御協力を与えられたことに対し深謝する次第である．

参　考　文　献

1. Horn, J. 〔1912〕, “Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen,” Math. Ann., 510-532. 71.
2. Horn, J. 〔1915〕, “Integration linear Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen, “Jahresber, Deut. math. Ver., **24**, 309-325; 74～83. 25.74～83.
3. Horn, J.〔1944〕, “Integration linearer Differentialgleichungen auch Laplacesche Integrale I,II,” mat. Z., **49**, 339～350; 684-701.

4. Turrittin, H. L. 〔1955〕, "Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular Point, Acta Math., **93**, 27–66.
5. Turrittin, H.L. 〔1963〕, "Reducing the rank of ordinary differential equations," Duke. Math., J., **30**, 271–274.
6. Trjitzinsky, W. J. 〔1935〕, "Laplace integrals and factorial Series in the theory of linear differential and differen ce equations," Trans, Am. Math. Sos., 37,80–146.