愛知工業大学研究報告
第３２号Ｂ　平成９年

非定常－飽和・不飽和浸透流に対する有限要素解析の解

Finite Element Solution of Unsteady Saturated-Unsaturated Seepage Flow

口石 孝幸[†]，　　木村 勝行[††]
Takayuki KUTIISI,　　Katsuyuki KIMURA

Abstract: A solution obtained by applying finite element analysis to a non－steady saturated unsaturated seepage flow in ground, often disagrees with other ones obtained under other calculating condition, namely the time interval, the mesh size and the allowable error of convergency at each time step. The trouble is that it has not been so far known the way of finding out the most exact solution among these different ones through finite element analyses.

In this paper, for the purpose of making such trouble clear, relationships between exact solution and such factors as time step interval, mesh size and allowable error are discussed. Furthermore, the procedure for obtaining the most exact solution is proposed.

１．はじめに

非定常－飽和・不飽和浸透流を有限要素法（FEM）によって解析を行うと、計算時間ステップ（時間きざみ）ごとに解が収束する安定な場合であっても、時間きざみ、メッシュサイズ（空間きざみ）および許容誤差の組み合わせによって、得られた解に差がでることがある。どのような条件を満たすときに正解が得られるかについては、まだ明らかとなっていない[1)～4)]。

本研究では、実験との対比から数値計算結果が正解であることが確かめられている浸透問題の２つの例、すなわち、1)水路からの地下水涵養問題（ Vauclin ら[5)] が実験と解析を行った浸透問題）と 2)降雨による斜面内浸透問題を取り上げ、いろいろな時間きざみ、許容誤差およびメッシュサイズの組み合わせによって得られる解を正解（もしくは、実験値）と対比して、この種の浸透問題の FEM解析にみられる解の差と時間きざみ、メッシュサイズおよび許容誤差との関係を調べ、FEM 解析結果に記載すべき必須項目について検討する。

† 愛知工業大学大学院　学生（豊田市）
†† 愛知工業大学　土木工学科（豊田市）

２．解析モデルおよび解析方法

２・１　水路からの地下水涵養問題（ Vauclin らが実験と解析を行った浸透問題）

Vauclinら[5)] が行った実験の概略を図-2.1に示す。同図において、実験材料には、d_{50} =0.3mmの川砂を使用している。実験開始とともに、領域上面 y 軸から 50cm の範囲に 2.5cm間隔のパイプから一定量 q_0=14.8cm/hが涵養される。

解析モデルは、図－ 2.2 に示す Vauclinら[5)] が実験と数値解析を行ったものである。同図において

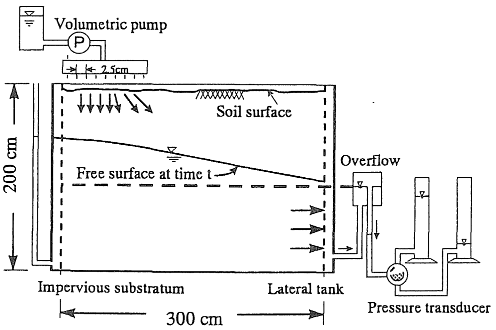


図-2.1 Vauclinらの実験装置の概略

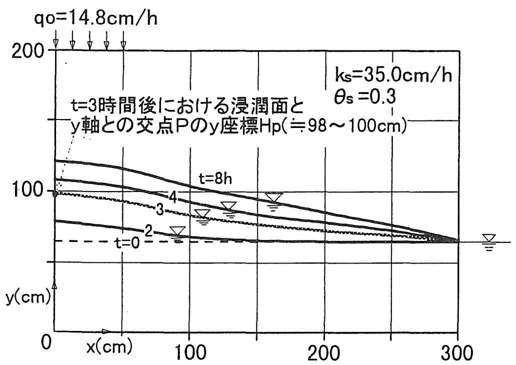
x 軸と y 軸は不透水面である。解析領域は、高さ200cm、長さ 300cm である。外水位は65cmに保たれる。領域の飽和透水係数はk_s= 35cm/h、飽和体積含水率は θ_s=0.30 である。領域の不飽和透水特性は実験の計測データから算出され圧力水頭 h(cm)と飽和度 θ/θ_sの関係は、

$$\theta/\theta_s=40000/(40000+|h|^{2.90})$$

hと相対透水係数比k/k_sの関係は、

$$k/k_s=2.99\times10^6/(2.99\times10^6+|h|^{5.0})$$

を得た。これらの関係を用いて差分法によって計算を行い、図－2.2 に示す t=0,2,3,4,8h 後の浸潤面形を求めている。



図－2.2 Vauclinらの計算による浸潤面形

本研究では、上記の問題のFEM解析を行った。FEMによる定式化には、Galerkin法による重み付き残差法を採用し、時間項には中央差分法を採用して各時間ステップ(時間きざみ)に対して許容誤差以下になるまで反復計算した。解析領域は、x 方向の0～100cm間と 100～300cm 間、y 方向は、0～65cm 間と65～200cm 間をそれぞれ等分割し、四辺形要素で組み立てた。計算を行った５ケースの等分割数の組み合わせと分割要素の y 方向の最小幅 Δy_{min} を表－2.1 に示した。

表－2.1 要素サイズおよび計算条件

Case	x－方向 ①	x－方向 Δx (cm)	x－方向 ②	x－方向 Δx (cm)	y－方向 ③	y－方向 Δy (cm)	y－方向 ④	y－方向 Δy_{min} (cm)	時間きざみ Δt(s)		許容誤差 ΔE(cm)	
1	14	7.14	14	14.29	10	6.50	36	3.75	1	60	0.001	0.05
2	10	10.00	10	20.00	7	9.29	27	5.00	2.5	100	0.0025	0.1
3	8	12.50	10	20.00	7	9.29	17	7.94	5	200	0.005	0.25
4	6	16.67	8	25.00	6	10.83	13	10.38	10	225	0.01	
5	6	16.67	7	28.57	4	16.25	9	15.00	20		0.025	

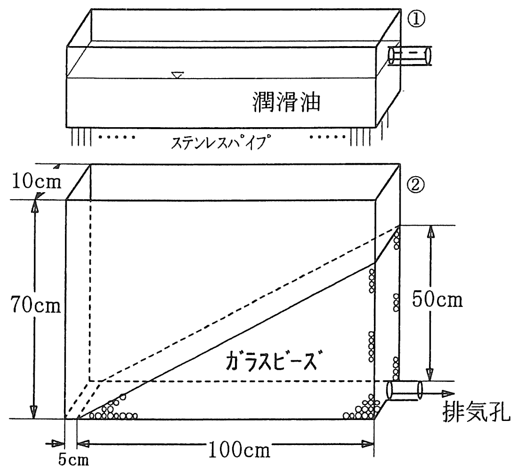
① x方向0～100cm間の等分割数 ② x方向100～300cm間の等分割数
③ y方向0～65cm間の等分割数 ④ y方向65～200cm間の等分割数

表に示すように解析では、計算時間きざみΔt(s)を９種類、許容誤差 ΔE(cm)を８種類とし、それぞれの分割方法に対し、Δt と ΔEの種々の組み合わせについて解析を行った。後の 3.では、図中の t=3h 後の浸潤面と y 軸との交点の座標を Hp とし、Vauclin らの計算による Hpとここでの FEM 解析による Hpとを比較し、検討を加える。なお、Vauclinらの図からは、Hp≒ 99cm と読み取れるが、以下では Hp=98～100cm を正解の範囲として用いることにする。

２・２　降雨による斜面内浸透問題

図-2.3に降雨による斜面内浸透流実験の概略を示す。

降雨による斜面内浸透流の実験は、毛管上昇の影響を少なくするためガラスビーズ（2.00mm～2.80mm）を用いて作製し、降雨には潤滑油（動粘性係数：ν≒1.5 St）を使用した。実験装置は、実験斜面構築用の容器と降雨発生装置から成っている。降雨発生装置は、底面に内径 1.5～2.0mm のステンレスパイプを 1.25cm 間隔で正方形に配置（計 640本）し、パイプの径や長さを変えることによって斜面への油の供給強度Rが調節できるようになっている。 実験斜面構築用の容器は、奥行き10cm、底面長さ 105cm高さ 70cmの全面アクリル樹脂板で作製し、 一端の側壁下部には実験時における斜面内の間隙空気の閉塞を防ぐための排気孔が設けてある。実験は、潤滑油の粘性を一定にするために恒温室内において行った。斜面内の浸透状態の変化を知るために写真撮影を行った。なお、実験斜面内の油の流れは、土中の浸透に相当するので、ここでは油の流れについても土中の浸透と同様の用語（降雨強度，透水係数）を用い



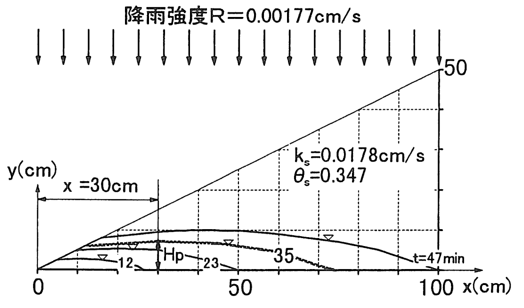
①降雨発生装置、②実験斜面構築用容器

図-2.3 降雨による斜面内浸透実験の装置概略

ることとする。ガラスビーズと潤滑油の組み合わせによる実験斜面内の飽和透水係数、飽和体積含水率および初期体積含水率に相当する値は、飽和透水係数 k_s= 0.0178 cm/s、飽和体積含水率 θ_s＝0.347、初期体積含水率 θ_i=0.031 である。降雨強度に相当する潤滑油の供給強度は、R= 0.00177cm/sである。

実験斜面の概略と実験で得られた浸潤面形を図－2.4に示す。浸潤面形は、降雨開始から t=12,23,35,47分後のものである。

FEM 解析モデルは、降雨による斜面内浸透実験を行った浸透問題である。FEMによる定式化には、2.1 水路からの地下水涵養問題で用いた方法と同様に、Galerkin 法による重み付き残差法を採用し、時間項には中央差分法を適用して、各時間区間（時間きざみ ⊿t）に対して許容誤差（⊿E)以下になるまで反復計算した。解析領域内は全て等分割の三角形要素で組み立てた。等分割数および要素のサイズを表す⊿x（x方向のきざみ幅)、⊿y（y方向のきざみ幅）を表－2.2 に示す。



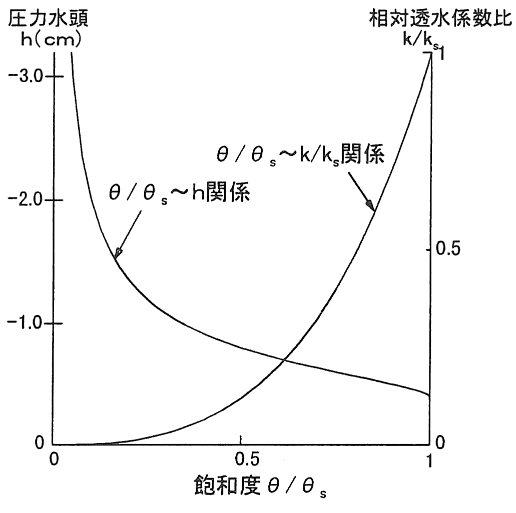
図－2.4 降雨による斜面内浸透流の実験による浸潤面潤面形

表－2.2 要素サイズおよび計算条件
（降雨による斜面内浸透問題）

分割 case	x,y方向の 等分割数	⊿x (cm)	⊿y (cm)	⊿t (s)		⊿E (cm)		
1	40	2.5	1.25	120	5	0.5	0.02	0.0005
2	20	5.0	2.5	60	3	0.2	0.01	0.0002
3	10	10.0	5.0	30	1	0.1	0.005	0.0001
				10		0.05	0.002	

表に示すように解析では、計算時間きざみ ⊿t(s) を 7 種類、許容誤差 ⊿E(cm) を 11種類とし、3種類の分割方法それぞれに対し、⊿tと ⊿E をいろいろ組み合わせて行った。

解析領域の飽和透水係数、飽和体積含水率、初期体積含水率および供給強度についても実験のものと同じ値を用いる。解析に用いた不飽和透水特性（飽和度 θ/θ_s ～圧力水頭 hの関係および、θ/θ_s～相対透水係数比 k/ks の関係）を図－2.5 に示す。



図－2.5 不飽和透水特性（仮定）

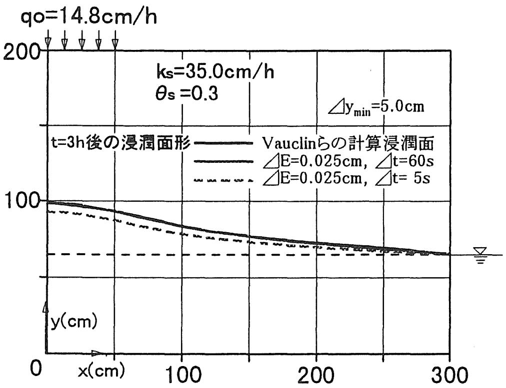
これらの関係は実験では求めることができないため、要素分割 ⊿x= 5.0cm に対して、不飽和透水特性を仮定して FEM解析を行い、計算浸潤面が実験浸潤面と合致するように不飽和透水特性に修正を加え

て決めたものである。この解析でも 2.1と同様に、Hp について整理する。Hp は図－2.4 に示すように、t=35min 後の x=30cm の位置における浸潤面高とし、実験で得られた Hp とここでの FEM 解析による Hp とを比較し、検討を加える。なお、実験結果からHp≒7.0cmと読み取れるが、以下では、Hp=6.5～7.5cm を正解の範囲として用いることにする。

3． ＦＥＭ解析結果および検討

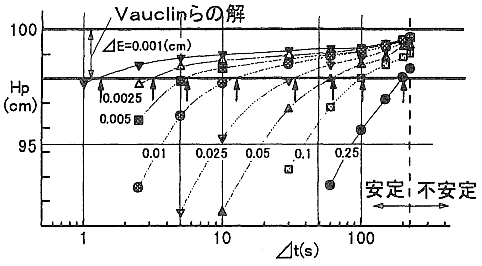
3・1 水路からの地下水涵養問題

図-3.1に計算により得られた浸潤面形の例を示す。図中の結果は、許容誤差 ⊿E = 0.025cmとして、時間きざみ⊿t=60s（実線）と ⊿t=5s（点線）と変えた場合の t=3h 後の浸潤面である。図から、許容誤差および時間きざみの組み合わせによって得られる結果が異なることがわかる。



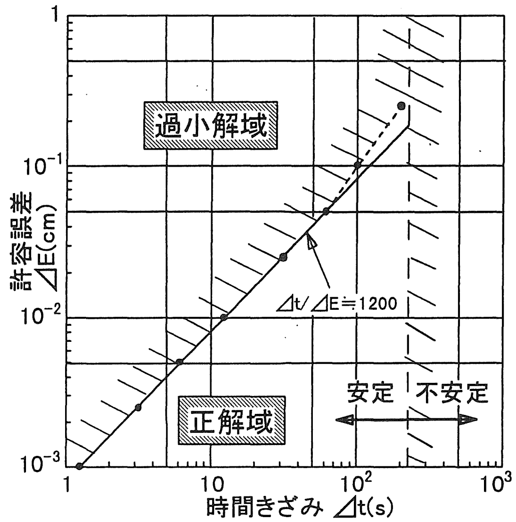
図－3.1 t=3h後の浸潤面形状

図-3.2 に、⊿y_{min}=5.0cm(Case.2) での t=3h 後の計算浸潤面と y 軸との交点 Hpと計算時間きざみ⊿tの関係を許容誤差⊿Eをパラメーターとして示す。図中の記号は、⊿E の値で区別されている。計算では、時間きざみ⊿t=240sとした場合、表－2.1 に示した許容誤差 ⊿Eに対して解は収束することがなかった(不安定)。時間きざみ ⊿ｔ＝225s の場合には⊿E≦ 0.0025cmに対して不安定、⊿E≧0.005cmに対して解は収束した（安定）。図では、⊿t=225sを安定と不安定の境界としている。図中に Vauclinらによる正解の Hpの範囲（98～100cm）を示してあるが FEM解析では、この範囲の上方の解(Hp＞100cm)は得られなかった。



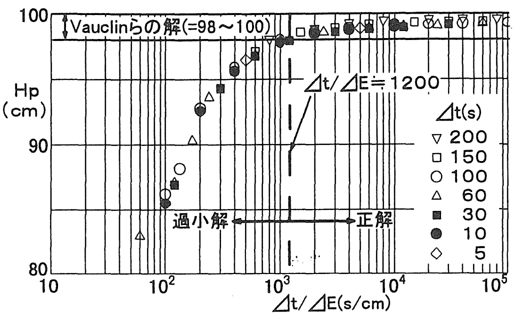
図－3.2 ⊿ｔと⊿Eによる解の差
（Case.2 ⊿y_{min}=5.0cm）

一方、下方の解(Hp＜98cm,以下では過小解と呼ぶことにする)は、いずれの ⊿E の場合にも現れている。図に見られるように許容誤差（⊿E)を一定とした場合、時間きざみ(⊿t)を小さくするほど Hpの値は小さく得られる。正解を得る計算時間きざみ ⊿t の範囲は、⊿E=0.001cm に対して ⊿t≒1～200s であるが、⊿E= 0.1cmに対しては ⊿t≒ 100～225sと狭まっている。すなわち、正解を得る計算時間きざみの範囲は、許容誤差を小さく設定した場合ほど広くなる。正解と過小解の境界値（Hp= 98cm）を与える ⊿tの位置を同図中に矢印（↑）で示す。これらの ⊿Eと⊿tの値を新たに図－3.3 に示す。図から、1s＜⊿t＜100s および 0.001cm＜ ⊿E＜0.1cm の範囲における過小解域と正解域の境界上の点（ ⊿t, ⊿E ）は、同一直線上に位置し、この直線の勾配は



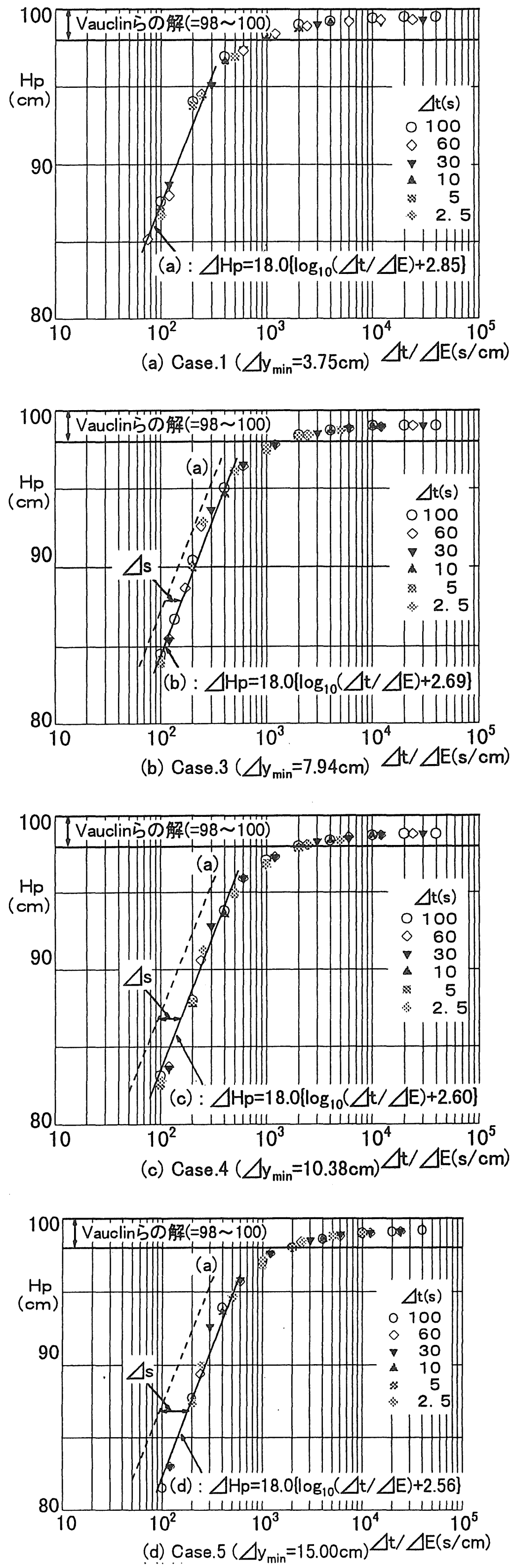
図－3.3 正解と過小解との境界となる⊿t～⊿E関係
（Case.2 ⊿y_{min}=5.0cm）

ほぼ 1となっている。つまり⊿t/⊿E≒const. となっている。同図から、⊿t/⊿E＞1200 の場合には正解が得られ、⊿t/⊿E＜1200 の場合には過小解を得ることがわかる。図－3.4 は図－3.3 に対する検討結果を受けて、Hp(cm)、時間きざみ ⊿t(s) および許容誤差 ⊿E(cm) の関係を Hp～⊿t/⊿E 関係として整理し直したものである。図－ 3.3において過小解域と正解域の境界は、⊿t/⊿E≒ 1200と表されたことが図－3.4 によって再確認できる。さらに、正解および過小解域の全ての ⊿t/⊿Eの組み合わせに対しHp～⊿t/⊿E 関係は、概ね、ただ１本の曲線に集約されることがわかる。



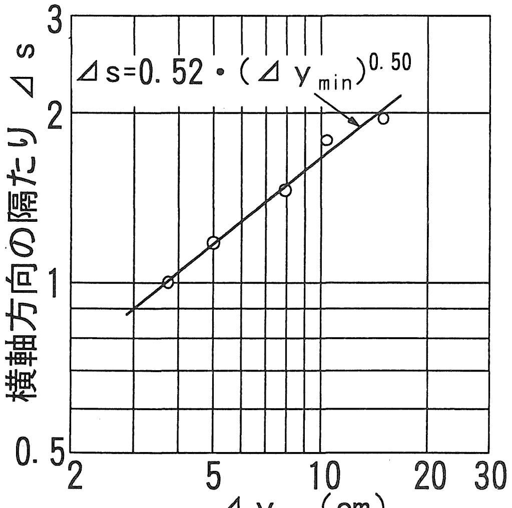
図－3.4 Hp～⊿ t / ⊿E関係(Case. 2 ⊿y_{min}=5.0cm)

図－3.5は要素サイズ(⊿y_{min}= 3.75, 7.94, 10.38, 15.00) ごとに Hp～⊿t/⊿E 関係について整理したもので、図の (a),(b),(c),(d) はそれぞれ表－2.1中の Case1, 3, 4, 5の解析結果である。これらの図から Hp～ ⊿t/⊿E 関係は各 Case ごとに、すなわち⊿y_{min}ごとに概ね１本の曲線で表されていることがわかる。図中の (a)の場合、⊿t/⊿E＞2×10^3で Hp の値が Vauclin らの値 (Vauclinらの計算結果から読みとった正解の範囲 Hp =98～100cm) と一致し、2×10^3＞ ⊿t/⊿E＞ 4×10^2で緩やかに減少し、4×10^2＞⊿t/⊿Eで急激にかつほぼ直線的に減少している。この傾向は、(b),(c) および (d)の場合も同様である。以上のことから、水路からの地下水涵養問題(Vauclinらが実験と解析を行った浸透問題) の解析においては時間きざみ ⊿t、許容誤差 ⊿Eごとに結果を整理するのではなく、⊿t/⊿E の値により結果を整理すると、図－ 3.4 および 3.5 に示すように、概ね、1 本の曲線で表すことができ、この曲線によって正解域と過小解域との区別ができることがわかる。



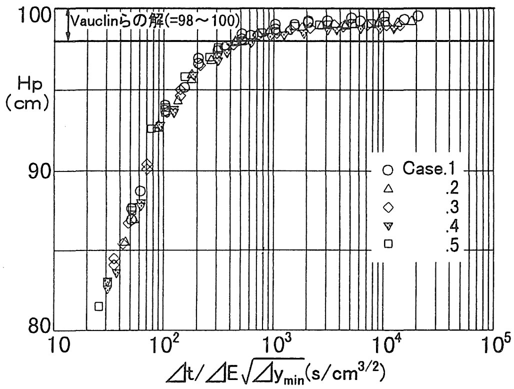
図－3.5 要素サイズ⊿y_{min}によるHp～⊿t/⊿E関係

また、図-3.5 の (a),(b),(c),(d) を対比してみると、(b), (c) および (d) は、(a) を横軸の正の方向に平行移動した関係になっている。今、(a) の 60< ⊿t/⊿E< 400 に対して直線の式を求めると、(1): Hp=18.0{$\log_{10}$(⊿t/⊿E)+2.85} となる。(b), (c),(d) 図および Case.2(図-3.4 : ⊿y_{min}=5.0cm) の同部分 (60< ⊿t/⊿E<400) に対しては、(1) 式と等しい勾配をもつ直線として式を求め、右辺の定数項[(1) 式右辺 { } 内の 2.85 に対応] のみを示すと、(2):2.78、(b):2.69、(c):2.60、(d):2.56となる。、(b),(c)および(d)の図中には、直線式と直線 (1)との横軸方向の隔たり ⊿s を示す。 横軸方向の隔たり⊿s は (d)を例に求めると⊿s=$10^{2.85}/10^{2.56}$=1.95となる。同様にして (2),(b) および (c) 直線についても (1) 直線との ⊿s を求めると、それぞれ ⊿s= 1.17, 1.45, 1.78 となる。図－3.6に ⊿sと ⊿y_{min} の関係を示す。図から、$\log_{10}$⊿s と $\log_{10}$⊿y_{min} はほぼ直線的な関係にあり、両者の関係式を求めると⊿s= 0.52× ⊿$y_{min}^{0.50}$ の関係となる。すなわち、⊿s∝$\sqrt{⊿y_{min}}$ である。



図－3.6 ⊿s～⊿y_{min}関係

図－ 3.7 は、図 - 3.4および図－ 3.5 (a), (b), (c), (d) の横軸を⊿t/ (⊿E$\sqrt{⊿y_{min}}$) に変え、各図の ⊿t=100, 30 および 10sの結果を描き直したものである。図から見とれるように、⊿t, ⊿Eおよび ⊿y_{min} の種々の組み合わせによる解析結果が、



図－3.7 Hp～ ⊿t／ (⊿E$\sqrt{⊿y_{min}}$) 関係

概ね1本の曲線で表されていることがわかる。

図－ 3.8に t=3h の計算浸潤面形状全体を示す。同図は、図－3.5 に示した要素サイズ(⊿y_{min}=3.75, 7.94, 15.00cm)に対し、時間きざみ ⊿t=60s、許容誤差 ⊿E=0.0025cm の正解域に収まっている計算結果である。図のように、計算浸潤面は各要素サイズに対して正解と一致している。

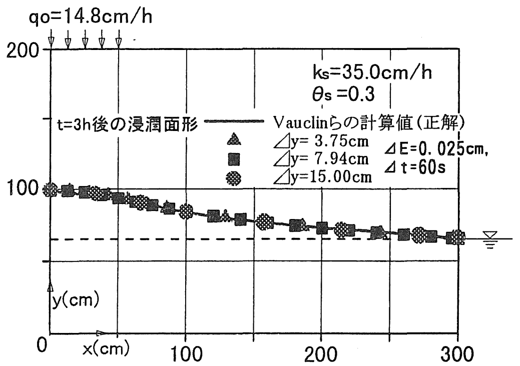
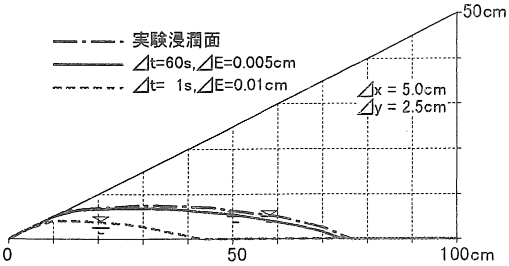


図-3.8 要素サイズと浸潤面形状

3・2 降雨による斜面内浸透問題

図－3.9 に計算結果の例を示す。図は、要素サイズ⊿x=5cm、計算時間きざみ⊿t= 60s、許容誤差⊿E = 0.005cm(実線)と要素サイズ⊿x=5cm、計算時間きざみ ⊿t=1s、許容誤差 ⊿E=0.01cm(点線)の結果である。この浸透問題に対する計算においても、3・1 の水路からの地下水涵養問題と同様に計算条件(⊿x, ⊿t, ⊿E)の違いにより得られる解が異なる。ここでは、 ⊿tと ⊿Eによる解の差の整理結果が、3.1 で示した結果(3.1 中図－3.2)と同様の傾向であった



図－3.9 t=35min後の浸潤面形

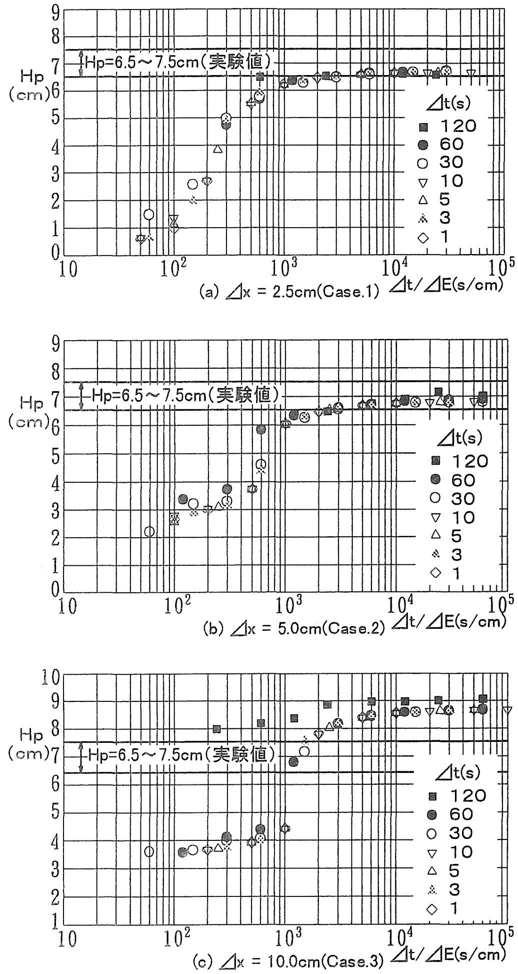
ため、要素サイズごとにHp～ ⊿t/⊿E関係により結果を整理する。Hp の値は、図－2.4 に示す t=3h後の x=30cm での浸潤面高である。図－3.10(a),(b),(c) は表－ 2.2の３種類の大きさの要素分割に対する FEM解析結果を Hp～⊿t/⊿E関係によって整理したものである。(a),(b),(c) いずれの図においても、⊿t/⊿E(s/cm)の値が 50～ 50,000 と大きくなるのに対応して Hp(cm) の値が約 1～3.5cm から 6.5～9cm まで変化しており、解に差がでているのが明らかである。図中に書き入れた実験値 Hp（=6.5～7.5 cm）の値との比較から、FEM解析による正解は Hpの値が約7.0cm に収束する、⊿t/⊿E の値の大きい計算条件下で得られるといえる。同様の結果は、前述した水路からの地下水涵養問題についても得られたことである。

以上のことから、降雨による斜面内浸透問題についても、先の地下水涵養問題と同様に、時間きざみ⊿t、許容誤差 ⊿E の個別による整理ではなく⊿t/⊿E による整理をするとほぼ１本の曲線で表され正解域と過小解域が見て取れることがわかる。

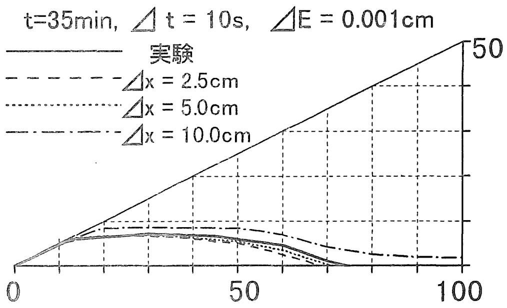
ところで、図－ 3.10(a),(b),(c) の FEM 解析による Hpの収束値と実験のHp値とを比較すると、(c) の両値の隔たりが (a),(b)のものより大きめである。この相違を浸潤面形状全体で見ると図－ 3.11 のようである。

図中の浸潤面は、(a),(b),(c) の３種の分割要素の大きさそれぞれに対し、すべて ⊿t＝10s、⊿E＝0.001cm の条件下の FEM解析結果である。図から認められるように、⊿x＝10cm とした分割要素の場合の浸潤面形状は実験のそれと一致しているとは言い難い。

以上の ２つの浸透問題に対する解析から、図－3.5および図－3.10に見られるような Hp～⊿t/⊿E 関係は、飽和域拡大のための補給水分の大部分が不飽和域から供給されるこの種の非定常－飽和・不飽和浸透問題に対する FEM解析解の特性の一つと考えられる。



図－3.10 Hp～⊿t/⊿E関係（ t ＝35min, x ＝30cm)



図－3.11 要素サイズと浸潤面形状

4. 結論

本研究では、実験との対比から数値計算結果が正解であることが確かめられている浸透問題の２つの例すなわち、1）水路からの地下水涵養問題（ Vauclin らが実験と解析を行った浸透問題）と2）降雨による斜面内浸透問題を取り上げ、いろいろな時間きざみ、計算時間ステップごとの許容誤差およびメッシュサイズの組み合わせによって得られる解を正解（もしくは、実験値）と対比して、この種の浸透問題の FEM解析にみられる解の差と時間きざみ、メッシュサイズおよび許容誤差との関係について検討した。結果は以下のようにまとめられる。

1)　飽和域拡大のための補給水分の大部分が不飽和域から供給される非定常－飽和・不飽和浸透問題に対する FEM解析では、解と計算時間きざみ（⊿t)や計算時間ステップごとの許容誤差(⊿E）との関係を個別に整理するのではなく、(⊿t/⊿E）との関係として整理すると、各要素サイズごとに、概ね 1本の曲線で表される。これは、この種の浸透問題に対する FEM解析解の特性の一つと考えられる。

2)　この種の浸透問題に対する解析結果では､通常､浸潤面形状のみが掲載されがちであるが、これに加えて計算条件としての分割要素の大きさ、計算時間きざみ、許容誤差および不飽和領域の特性の提示が必要と考えられる。

今後の課題として、他の多くの浸透問題を例に解析を行い、適切なメッシュサイズ、計算時間きざみおよび許容誤差の決め方を見いだすこと、すなわち、計算時間きざみ、許容誤差、メッシュサイズおよび不飽和透水特性などによる表示式としての、で表示される正解を得るための条件式を求めることがあげられる。

《参考文献》

1）土木学会：水理公式集（昭和 60年版），東京，pp.129-130，1985.

2）日野幹雄，伊藤剛，他：土木工学における 数値解析/流体解析編，土木学会編，pp.146-147，サイエンス社，東京，1974.

3）川原睦人：有限要素法流体解析，pp.175-176，日科技連，東京，1985.

4）MARY P.ANDERSON，WILLIAM W.WOESSNER （藤縄克之　監訳）： 地下水モデル 実践的シミュレーションの基礎，pp.118-127，共立出版株式会社，東京，1994.

5）M.Vauclin，D.Khanji，G.Vachaud，"Experimental and numerical Study of a Transient, Two-Dimensional Unsaturated-Saturated Water Table Recharge Problem"，Water Resources Reserch，Vol.15，pp. 1089-1101，1979.

6）木村勝行，口石孝幸：FEMによる非定常－飽和・不飽和浸透流の計算条件，平成7年度 土木工学会中部支部研究発表会概要集，PP.423-424，1996.

7）木村勝行：非定常－飽和・不飽和浸透流のFEM解析解，第 31 回地盤工学研究会発表講演集，PP.2111-2112，1996.

（受理　平成９年３月21日）